FÍSICA
BÁSICA



CEPRE-UNI

CENTRO DE ESTUDIOS PRE-UNIVERSITARIOS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

PRESENTACIÓN

El Centro de Estudios Preuniversitarios de la UNI, se complace en presentar a la comunidad educativa y al público en general, el libro titulado FÍSICA BÁSICA, que desarrolla contenidos a nivel fundamental, sin emplear conocimientos de cálculo diferencial e integral a fin de que pueda ser utilizado por un vasto sector de estudiantes que requieren de bibliografía que dé énfasis en la presentación de contenidos teóricos.

Este libro es un aporte de físicos e ingenieros que actualmente son docentes en CEPRE- UNI y a la vez docentes en la UNI. Por esta razón considero que este libro es un valioso aporte de conocimientos y experiencia docente que hoy ponemos al servicio del país.

El libro consta de catorce capítulos que incluyen contenidos teóricos, ejemplos y problemas propuestos sobre vectores, cinemática, dinámica, trabajo, energía, impulso, cantidad de movimiento, calor, temperatura, termodinámica, gases, electrostática, corriente eléctrica, magnetostática, ley de inducción de Faraday, ondas electromagnéticas, óptica geométrica, óptica física y física moderna.

Estoy seguro de la acogida que tendrá esta primera edición y que contribuirá positivamente para que el estudiante alcance sus objetivos con éxito. Vuestra valiosa sugerencia puede ser enviada a la dirección electrónica cepre@uni.edu.pe

Ing. Pedro Carreño Mendiola
Director

CENTRO DE ESTUDIOS PREUNIVERSITARIOS
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

DIRECTORIO

Ing. Pedro Carreño Mendiola
Director

Ing. Jorge Ponce Urquiza
Coordinador General

Autores :

* Asmat Rodriguez, Juan
* Brocca Pobes, Manuel
* Caballero Torres, Eduardo
* Caro Amery, José
* Chirinos Villaruel, Fernando
* Cosco Grimaney, Jorge
* Hiromoto Hiromoto, Manuel
* Huamán Pérez, Fernando
* Lino Oregón, Pablo
* Oneto Mujica, Humberto
* Pauyac Huamán, José
* Pérez Collantes, Rafael
* Rondinel Pineda, Circe
* Talledo Coronado, Arturo
* Ugarte López, César
* Valdivia Mendoza, Héctor
* Varas Rojas, Oscar
* Vasquez Alva, Darío
* Vergara Motta, Monsoni
* Vilchez Vilchez, Tito

INDICE

Capítulo 1

Magnitudes de la Física

1. INTRODUCCIÓN

Las leyes de la física se expresan en términos de cantidades medibles llamadas magnitudes, y para el buen entendimiento y uso de dichas leyes, es necesario tener claramente definidas y bien entendidas las magnitudes de la física. Estas magnitudes pueden ser clasificadas de varias formas y tienen ciertas unidades de medida, por lo que resulta muy útil la existencia de un sistema de unidades coherente y de aceptación internacional (Sistema Internacional de Unidades).
Por su naturaleza las magnitudes pueden clasificarse como escalares o vectoriales, siendo las magnitudes vectoriales particularmente útiles en el estudio de la física por la gran cantidad de información vectorial.
A la explicación de las magnitudes físicas, la presentación del sistema internacional de unidades, y el estudio de las funciones y vectores, nos dedicaremos en este primer capítulo.

1.1 Magnitudes de la Física

Una ***magnitud*** o ***cantidad física***, es una característica medible de un fenómeno físico o de un objeto. Las magnitudes físicas son numerosas y describen los fenómenos físicos y los objetos. Son ejemplos de magnitudes físicas: el tiempo, la masa, la temperatura, la velocidad, el volumen, la presión, la carga eléctrica, etc.
Analicemos como ejemplo, el movimiento vertical de un cuerpo que es lanzado partiendo del reposo, como se ve en la figura 1.1. Las principales magnitudes de este movimiento son: la altura, la velocidad, la aceleración y el tiempo transcurrido.

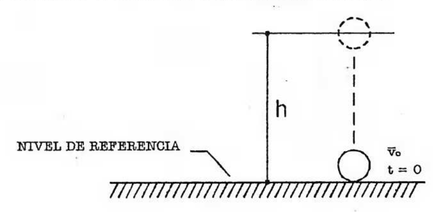


Fig. 1.1 Caída libre de un cuerpo

Para hallar las leyes que gobiernan el movimiento vertical de los cuerpos, deberíamos observar este fenómeno repetidamente y medir sus magnitudes, tratando de encontrar alguna relación entre ellas, como la que existe entre la altura (h) y el tiempo (t), expresada por la ecuación:

$$h = v_0 t - \frac{a t^2}{2}$$

En esta expresión h y t son variables y v_0 y a son constantes.

Según su origen, las magnitudes físicas se suelen clasificar en dos tipos:

- Magnitudes fundamentales
- Magnitudes derivadas

Las ***magnitudes fundamentales*** son aquellas que convencionalmente se consideran elementales e independientes, es decir que no pueden ser expresadas en términos de otras magnitudes ni tampoco pueden expresarse entre sí. Para medir estas magnitudes, se requiere de un patrón de medición el cual determina una unidad de medida, de tal forma que la magnitud puede ser expresada como un múltiplo o submúltiplo de dicha unidad. La unidad de medida debe estar reproducida en las escalas de los instrumentos de medición.

Las ***magnitudes derivadas*** son aquellas cuya definición está dada en términos de otras magnitudes fundamentales o derivadas. Cabe resaltar que en algunas ocasiones, dada la relación entre las magnitudes físicas estudiadas, elegir cuál es la magnitud fundamental y cuál es la magnitud derivada, es un acto puramente convencional, como sucede con la masa y la fuerza; si elegimos la masa como fundamental, entonces la fuerza es derivada, y si elegimos la fuerza como fundamental, entonces la masa es derivada. Esto mismo sucede con la carga eléctrica y la corriente eléctrica.

De esta forma se define la ***longitud*** como una magnitud fundamental que indica el largo de un cuerpo, medido en una unidad que en el Sistema Internacional es el ***metro***, el que a su vez está definido como la longitud de una ***barra patrón*** de platino e iridio guardada en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en París.

Se define la ***masa*** como una magnitud fundamental que indica la tendencia de los cuerpos a mantener su estado de reposo o movimiento a velocidad constante (inercia), medida en una unidad que en el Sistema Internacional es el ***kilogramo***, el que a su vez está definido como la masa de un ***cilindro patrón*** de una aleación de platino e iridio que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.

Se define el ***tiempo*** como una magnitud fundamental que determina la duración de los fenómenos físicos, medido en una unidad que en el Sistema Internacional es el **segundo**, el que a su vez está definido como la 1/86400 parte de un ***día solar medio patrón***.

A partir de definiciones como las anteriores se definen magnitudes derivadas, como el ***área*** por ejemplo, que medida en m^2 es el producto del largo por el ancho de una superficie (ambos longitudes), o el ***volumen***, que medido en m^3 es el producto del largo por el ancho y por el alto de un cuerpo (tres longitudes). No es necesaria la existencia de patrones de área ni de volumen.

Otras magnitudes derivadas son la aceleración, la fuerza, la presión, el volumen, la densidad, etc. Así tenemos por ejemplo, que la densidad de un cuerpo (ρ) está definida como la razón de su masa entre el volumen que ocupa:

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \text{unidades: } \frac{kg}{m^3}$$

Hay que mencionar que en el transcurso de los años y debido a las exigencias de la ciencia, los patrones de longitud y tiempo han tenido que ser redefinidos sobre la base de patrones atómicos.

El patrón de longitud, en el año 1969, se definió como 1 650 763,73 longitudes de onda del ^{86}Kr, y luego, en el año 1983, como la distancia que viaja la luz en el vacío en un tiempo de 1 / 299 792 458 segundos.

El segundo, en el año 1967, se definió como el tiempo que duran 9 192 631 770 vibraciones de la radiación emitida por el átomo de cesio.

No se ha desarrollado aún un patrón atómico para medir la masa en el Sistema Internacional, pero se tiene una magnitud fundamental relacionada que es la cantidad de sustancia (cantidad de átomos que conforman un cuerpo). La cantidad de sustancia se mide en moles, donde una mol es $6,023 \times 10^{23}$ átomos contenidos en un número de gramos igual a la masa molecular de la sustancia. Por ejemplo, una mol de ^{12}C tiene una masa de 12 gramos y contiene $6,023 \times 10^{23}$ átomos.

Existen en total siete magnitudes fundamentales, y las tres que aun no hemos mencionado son la ***temperatura***, la ***corriente***, y la ***intensidad luminosa***.

La unidad de medida de la temperatura es el Kelvin (K), definido en 1967 como la 1/273,16 partes de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

La unidad de medida de la corriente es el amperio (A), definido en 1946 como la cantidad de corriente que circulando por dos conductores paralelos separados un metro, produce entre ellos una fuerza de 2×10^{-7} N.

La unidad de medida de la intensidad luminosa es la candela, definida en 1979 como la intensidad luminosa de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} Hz en una dirección dada, y cuya intensidad energética en esa dirección es 1/683 vatios por estereorradián.

1.2 Sistemas de Unidades y el Sistema Internacional

Para medir una magnitud física se necesita una unidad, pero existen muchas unidades, y la medición de una magnitud puede arrojar diferentes valores numéricos dependiendo de la unidad que se utilice. Por ejemplo, la medición del largo de una mesa puede ser 1 metro en el Sistema Internacional, mientras que es de 39,37 pulgadas en el Sistema Ingles.

El desarrollo de la ciencia, la tecnología, y la economía, obligó a pensar en la creación de un sistema único de medición con características que permitan su fácil operación y unidades acordes con los valores requeridos por las aplicaciones científicas y tecnológicas. Este sistema único, aceptado por la mayoría de países del mundo, es el Sistema Internacional de Unidades (SI).

El Sistema Internacional, creado en 1960, establece las unidades mostradas en la

Tabla 1.1 para las siete magnitudes fundamentales. Las unidades SI para las magnitudes físicas restantes se muestran en los anexos y se recomienda revisarlas cuidadosamente.

Tabla 1.1 Magnitudes Fundamentales

Magnitud	Unidad SI	Símbolo	Dimensión
Longitud	Metro	m	L
Masa	kilogramo	kg	M
Tiempo	Segundo	s	T
Temperatura	Kelvin	K	θ
Intensidad de Corriente	Ampere	A	I
Intensidad Luminosa	Candela	Cd	J
Cantidad de Sustancia	Mol	Mol	N

(SI son siglas de Sistema Internacional)

1.3 Análisis Dimensional

Las ecuaciones dimensionales son representaciones de las ecuaciones físicas en las que las magnitudes se expresan en términos de sus dimensiones. En este texto entenderemos el término dimensión como sinónimo de magnitud fundamental.
El análisis de las dimensiones de una ecuación física (análisis dimensional) permite evaluar si la ecuación es dimensionalmente correcta (homogénea).

Las ecuaciones dimensionales también ayudan a deducir una expresión física a partir de resultados experimentales, por ejemplo, si se sabe por experiencia que la fuerza de resistencia al movimiento de una esfera dentro de un fluido depende de su radio R, de su velocidad v, y de la viscosidad η del fluido, se puede determinar a través del análisis dimensional si la expresión para calcular la fuerza resistiva es $v\eta R$ ó $v\eta/R$ ó $v/\eta R$ (ver el problema resuelto número 5).

Para simbolizar las dimensiones de una magnitud se usan corchetes, como se ve en el siguiente ejemplo en el cual a es la aceleración y está expresada en términos de la longitud y el tiempo (magnitudes fundamentales).

$$[a]=\frac{L}{T^2}=LT^{-2}$$

La notación $[a]$ se lee "dimensión de a" y decimos que esta dimensión es igual a LT^{-2}.

La tabla mostrada a continuación muestra las dimensiones de algunas magnitudes físicas comunes:

Magnitud	Fórmula	Dimensión (*)
Área	A	L^2
Volumen	V	L^3
Velocidad media	$v_M = \Delta x / t$	LT^{-1}
Aceleración media	$a_M = \Delta v / \Delta t$	LT^{-2}
Fuerza	$F = m.a$	MLT^{-2}
Trabajo	$W = F.d$	ML^2T^{-2}
Potencia	$P = W / \Delta t$	ML^2T^{-3}
Presión	$p = F / A$	$ML^{-1}T^{-2}$
Velocidad angular media	$\omega_M = \Delta\theta / \Delta t$	T^{-1}
Aceleración angular media	$\alpha_M = \Delta\omega / \Delta t$	T^{-2}
Cantidad de movimiento	$p = m.v$	MLT^{-1}
Carga eléctrica	$q = I.\Delta t$	IT
Diferencia de potencial eléctrico	$\Delta V = W / q$	$I^{-1}ML^2T^{-3}$
Resistencia eléctrica	$R = \Delta V / I$	$I^{-2}ML^2T^{-3}$

* Tal vez sería más apropiado usar el término "expresión dimensional" en lugar de "dimensión", para no confundirlo con otros conceptos como cuando se habla de espacio tridimensional por ejemplo.

En el trabajo con las ecuaciones dimensionales hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- El ***criterio de homogeneidad*** nos dice que una ecuación es dimensionalmente correcta, si todos sus términos tienen las mismas dimensiones, por ejemplo, si la ecuación A + B = C – D es dimensionalmente correcta, entonces:

  $$[A] = [B] = [C] = [D]$$

  lo que se lee como: "la dimensión de A es igual a la dimensión de B e igual a la dimensión de C y D", y se dice que la ecuación es "homogénea".
- El análisis dimensional cumple las reglas del álgebra, a excepción de la suma y la resta, ya que al plantear que todos los términos de una ecuación tienen las mismas dimensiones, no tiene sentido sumarlas o restarlas, sólo igualar sus dimensiones. En todo caso podemos decir que la suma o resta de dos dimensiones iguales resulta siempre la misma dimensión, por ejemplo, la expresión:

  $$[m] - [m] = [m] = M$$

muestra que la resta de dos masa es otra masa, y no cero como lo sugiere el álgebra común. Esto permite simplificar notablemente las ecuaciones dimensionales.

- Las constantes numéricas y los ángulos son adimensionales, lo mismo que las funciones trigonométricas, logaritmo, y exponencial, cuyos argumentos también deben ser adimensionales, por ejemplo:

$[\pi]=*$ $[seno(\omega t)]=* \rightarrow [\omega t]=*$ $[ln(x+8)]=* \rightarrow [x+8t]=*$

La dimensión de los términos adimensionales se denota convencionalmente con * y se le omite en el análisis dimensional, salvo el término adimensional se use como exponente, en cuyo caso se reemplaza por su valor numérico correspondiente.

EJEMPLOS

Prob 1.- ¿Cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, en el orden en que son presentadas?

1. Si uno de los términos de una ecuación dimensionalmente correcta se multiplica por $e^{\alpha z}$ la ecuación deja de ser dimensionalmente correcta.
2. La expresión $2\,ln(\alpha v)$, dimensionalmente correcta, es adimensional.
3. En la ecuación $x = A\,seno(\varpi t) + B\,coseno(\varpi t)$, A y B tienen la misma dimensión.

a) FFF b) FVF c) VFV d) FVV e) FFV

Solución:

El término $e^{\alpha z}$ es adimensional no importando que representen α y x, por tanto, multiplicar uno de los términos de una ecuación por este factor, no afecta sus dimensiones (F)

En una ecuación dimensional la función logaritmo y su argumento son adimensionales (V)

Por el principio de homogeneidad dimensional y teniendo en cuenta que las funciones trigonométricas son adimensionales, A y B deben tener las mismas dimensiones (V)

Respuesta: d)

Prob 2.- Si la siguiente expresión física es dimensionalmente homogénea:

$$Z = A\,seno(ax^2 + bx + c)$$

donde x se mide en metros y A en m/s, halle la dimensión de Za/bc.

a) L^{-1} b) T^{-1} c) LT^{-1} d) $L^{-1}T$ e) $L^{-1}T^{-1}$

Solución:

x en m $\rightarrow$ [x]= L   [ax^2] = * $\rightarrow$ [a]= L^{-2}

A en m/s $\rightarrow$ [A]= LT^{-1} [bx] = * $\rightarrow$ [b]= L^{-1}

por homogeneidad [A]= [Z]= LT^{-1} [c] = *

luego: [Za/bc]= $(LT^{-1} L^{-2}) / L^{-1} = T^{-1}$

Respuesta: b)

Prob 3.- Determine las dimensiones de α y β en la siguiente ecuación que es dimensionalmente correcta:

$$y=\alpha \,.\, tan(\theta_0)-\left(\frac{a}{2\beta^2 \cos^2(\theta_0)}\right)x^2$$

Donde x e y son desplazamientos y a es aceleración:

a) L^{-1} y LT^{-1} b) L y LT   c) LT y LT^{-1} d) L y LT^{-1} e) L y T^{-1}

Solución:

x e y son desplazamientos $\rightarrow$ [x] = [y] = L
a es aceleración $\rightarrow$ [a] = LT^{-2}
por homogeneidad: $\rightarrow$ [y]= [α]=L
también, eliminando los valores adimensionales 2 y $\cos^2(\theta_0)$ de la ecuación dada: [y]= [ax^2/β^2] $\rightarrow$ $(LT^{-2} L^2) / [\beta^2] = L$ $\rightarrow$ $[\beta^2] = L^2 T^{-2}$ $\rightarrow$ $[\beta] = L T^{-1}$

Respuesta: e)

Prob 4.- La ecuación $p = p_0\, e^{\left(-g\frac{y}{s}\right)}$ es dimensionalmente correcta y corresponde a la variación de la presión atmosférica con la altura. Si g es la aceleración de la gravedad, determine la dimensión de p_0 y de $(s/y)^2$.

a) $ML^{-1}T$ y LT^{-4} b) MLT^{-2} y L^2T^4 c) $ML^{-1}T^{-2}$ y $L^{-2}T$

d) MLT y L^2T e) $ML^{-1}T^{-2}$ y L^2T^{-4}

Solución:

por homogeneidad: $[P_0] = [P] = M L^{-1} T^{-2}$

por otro lado [-g y/s] = * $\rightarrow$ [y/s] = $[g]^{-1} = (L T^{-2})^{-1} = L^{-1} T^2$

Luego: $[s/y]^2 = (L^1 T^{-2})^2 = L^2 T^{-4}$

Respuesta: e)

Prob 5.- La fuerza resistiva sobre un glóbulo rojo (esférico), que se mueve en la sangre, depende de su radio R, de su velocidad v, y de la viscosidad η de la sangre.

Experimentalmente se ha determinado que si R = 2 μm, v = 7.10^{-7} m/s, y $\eta = 3.10^{-3}$ kg/ms, la fuerza resistiva toma el valor de $252\,\pi\,10^{-16}$ N. Luego, la expresión para calcular la fuerza resistiva es:

a) $6\pi v \eta R$ b) $6\pi v\eta / R$ c) $v\eta / 6\pi R$ d) $v\eta R / 6\pi$ e) $vR / 6\eta\pi$

Solución:

si F es fuerza, un ensayo de su expresión en términos de las variables dadas es:

$F = K\,R\,v\,\eta$ donde K es una constante numérica adimensional.

usando análisis dimensional: $M\,L\,T^{-2} = L\,(L\,T^{-1})\,(M / L\,T) = M\,L\,T^{-2}$

luego, la expresión ensayada es dimensionalmente correcta, faltando sólo determinar el valor de la constante numérica. Para esto reemplazamos valores:

$252\,\pi \times 10^{-16}$ N = K (2×10^{-6} m) (7×10^{-7} m/s) (3×10^{-3} kg/ms)

$\rightarrow$ $K = 252\,\pi / 42$ $\rightarrow$ $K = 6\pi$ $\rightarrow$ $F = 6\pi\,R\,v\,\eta$

Respuesta: a)

PROBLEMAS PROPUESTOS

Prob 1.- Indique cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuales son falsas (F)

I. Las magnitudes físicas fundamentales tienen una única unidad de medida.
II. El metro es una cantidad física fundamental.
III. Los ángulos se miden en radianes y son adimensionales.
IV. La cantidad de sustancia es una cantidad física fundamental.

a) FVVF b) VVVV c) VFVV d) FFVF e) FFVV

Prob 2.- El torque en un acoplamiento hidráulico (τ) varía con las revoluciones por minuto del eje de entrada (N), la densidad del aceite hidráulico (ρ), y el diámetro del acoplamiento (D). Determine una expresión para el cálculo del torque.

a) $k\,N^{-2} D^{5}\,\rho$ b) $k\,N^{2} D^{5}\,\rho$ c) $k\,N\,D^{5}\,\rho$ d) $k\,N^{2} D^{5}\,\rho^{-1}$ e) $k\,N^{2} D^{4}\,\rho$

Prob 3.- Halle la dimensión de X para que la siguiente ecuación sea dimensionalmente correcta:

$$v.\,X = a^{\cos 60} + U.\,P.\,\ln 2$$

Donde: v = velocidad lineal y a = aceleración.

a) T^{-1} b) L^{-1} c) * d) $L^{-1}\,T$ e) $L^{-1/2}$

Prob 4.- Encuentre las dimensiones de A y q en la siguiente ecuación dimensionalmente correcta: $A\,T = U\,q^{2} + Z$. Donde U = energía, Z = energía por unidad de volumen, y T = tiempo.

a) $M L^{1} T^{-3}; L^{-3/2}$ b) $M L^{-1} T^{-3}; L^{-3/2}$ c) $M L^{-1} T^{-2}; L^{-3/2}$ d) $M L^{-1} T^{-3}; L^{-3}$ e) $M L^{-1} T^{-3}; L^{-2/3}$

Prob 5.- Determine las dimensiones de Q para que las siguientes ecuaciones sean dimensionalmente correctas:

$$W = 0{,}5\, m\, V^{\alpha} t^{\beta} + A\, g\, h + B\, P \qquad Q = A^{\alpha}\, B^{\frac{1}{\alpha}}$$

donde W = trabajo, m = masa, t = tiempo, V = volumen, g = aceleración de la gravedad, h = altura, y P = potencia.

a) $M^{2/3}\,T^{4/3}$ b) $M^{2/3}\,T^{3/2}$ c) $M^{3/2}\,T^{3/4}$ d) $M^{2}\,T^{3/4}$ e) $M^{2/3}\,T^{3}$

Prob 6.- La ecuación $v = A\cos(2\pi\, B\, t) + C\,sen(D\, t^{2}) + E\, t^{3}$ permite calcular el módulo de la velocidad de una partícula en función del tiempo *t*. ¿Cuales son las dimensiones de $k = (A\,E)/(B\,C\,D)$?

a) $L\,T$ b) $L\,T^{-1}$ c) $L\,T^{-2}$ d) $L\,T^{-3}$ e) $L\,T^{-4}$

Prob 7.- La presión que ejerce un flujo de agua sobre una placa vertical está dada por la expresión: $p = k\,Q^x \rho^y s^z$, donde p = presión, ρ = densidad, Q = caudal, s = área, y k = constante numérica. ¿Cuál será la expresión dimensionalmente correcta de la presión?

a) $p = k\,Q\rho\,s^{-2}$ b) $p = k\,Q^2\rho\,s$ c) $p = k\,Q^2\rho\,s^{-2}$ d) $p = k\,Q^2\,s^{-2}$ e) $p = k\,Q^2\rho\,s^{-1}$

Prob 8.- En ciertos apuntes de clase se encuentra la siguiente ecuación con un borrón ilegible ℘:

$$\wp\frac{\Delta v}{g} + \frac{\Delta p}{g\rho} = \Delta w$$

donde v = velocidad, g = aceleración, p = presión, y ρ = densidad. ¿Qué magnitud es la que aparece ilegible?, ¿cuáles son las dimensiones de α para que (α w) sea energía?.

a) densidad, $M L^{-1} T^{-2}$ b) longitud, $L^{-1} T^{-2}$ c) longitud, $L^2 T^{-2}$
d) velocidad, $M L T^{-2}$ e) velocidad, $M^{-1} L T^{-2}$

Prob 9.- La expresión: $seno\left(\frac{x\,v^2}{f\,L - E}\right)$ es dimensionalmente correcta, donde:

E = energía, v = velocidad, f = fuerza, y L = distancia. ¿A qué magnitud física corresponde x?

a) fuerza b) longitud c) tiempo d) masa e) energía

Prob 10.- Con respecto a la siguiente ecuación, $H = k\,A\frac{\Delta T}{\Delta x}$ donde k = constante, H = energía por unidad de tiempo, A = área, T = temperatura, y x = longitud, se puede afirmar que:

a) La ecuación es dimensionalmente incorrecta porque la constante k es siempre adimensional y las demás magnitudes no dan como resultado dimensiones iguales a las de H
b) Las dimensiones de ΔT/Δx son θ L
c) Las dimensiones de k son $M L \theta^{-1} T^{-2}$
d) La dimensión de H / A es $M L^{-1} T^{-2}$
e) La dimensión de H / (ΔT/Δx) es $M L^3 \theta^{-1} T^{-3}$

Prob 11.- Señale si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F):

I. La fuerza es una cantidad física fundamental pues cumple la ley fundamental: F = m a
II. La longitud, masa, y carga eléctrica, son magnitudes fundamentales.
III. Las magnitudes físicas fundamentales son aquellas que no se pueden definir en términos de otras porque son independientes entre sí.

a) VVV b) FVF c) VFV d) FFV e) VVF

2. Funciones y Gráficas

Las funciones son relaciones entre dos o más variables expresadas en una ecuación algebraica. Por ejemplo, la expresión $y = 2x$ relaciona la variable y con la variable x mediante una regla de correspondencia que dice que a la variable y le corresponde un valor igual al doble del valor de la variable x.
En las funciones se acostumbra expresar el valor de una sola variable, llamada variable dependiente, en función de todas las demás, llamadas variables independientes. En el ejemplo anterior y es la variable dependiente y x es la variable independiente.
Las variables independientes pueden tomar valores arbitrarios, mientras que la variable dependiente toma valores que dependen de los valores que tomaron las variables independientes, de acuerdo a la regla de correspondencia.
Por lo general las variables independientes se representan con letras tales como x, z, m, n, ..., y la variable dependiente se representa con la letra y. La notación $y = f(x)$ representa en forma abreviada que la variable y toma valores que dependen de la variable x y se lee "*y es una función de x*".
En nuestros estudios de física, también necesitamos relacionar las magnitudes de un fenómeno físico, así que podemos usar el concepto matemático de función y decir que las magnitudes de un fenómeno físico se relacionan como funciones.
A manera de ejemplo podemos hablar del movimiento acelerado de un auto sobre una pista recta (ver la Fig. 1.2). Las magnitudes físicas o variables del movimiento en este caso son la velocidad del vehículo, su aceleración, su posición, y el tiempo transcurrido durante el movimiento.

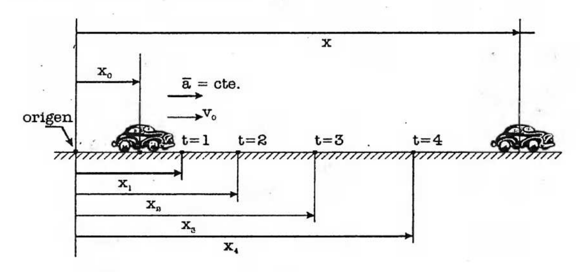


Fig. 1.2 Movimiento rectilíneo acelerado de un auto

Intuitivamente podemos darnos cuenta que la posición está relacionada con el tiempo transcurrido, pero si queremos predecir la posición del vehículo en un instante cualquiera, debemos tener una relación entre estas variables. Esta relación puede expresarse matemáticamente como:

$$x = x_0 + v_0\, t + \frac{a\,t^2}{2}$$

De esta forma se dice que la posición x es una función del tiempo t, o en forma más abreviada, $x = f(t)$. En este ejemplo x_0, v_0, y a, son constantes.

Para mostrar gráficamente la relación entre la variable x (posición) y la variable t (tiempo transcurrido) debemos asignar arbitrariamente los valores del tiempo trascurrido al eje x y los valores de la posición al eje y.

De esta forma los valores del tiempo y de la posición vienen a ser las coordenadas de una serie de puntos en el plano cartesiano, y si unimos estos puntos con una línea que pase por todos ellos, esta línea será la representación gráfica de la función o relación existente entre las magnitudes x y t (ver la Fig. 1.3).

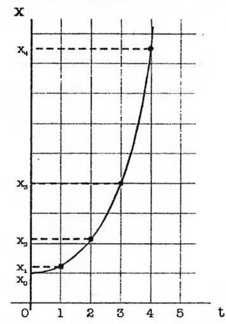


Fig. 1.3 Gráfica del movimiento recto acelerado del auto de la Fig. 1.2

Las gráficas brindan mucha información que es difícil de observar en la expresión matemática. En una gráfica se puede reconocer inmediatamente los puntos máximos o mínimos, la forma ascendente o descendente de la función, el valor de la pendiente, etc.
Sin embargo, hay que tener cuidado al interpretar las gráficas, pues como función matemática toda relación entre dos variables puede ser representada gráficamente, pero no toda gráfica representa necesariamente un fenómeno físico.

2.1 Funciones y gráficas importantes

2.1.1 Función Lineal

La función lineal está dada por la siguiente ecuación:

$$y = m\,x + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b el término independiente que representa el corte con el eje y.
Se puede ver en la Fig. 1.4 que el valor de la pendiente se puede calcular como:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

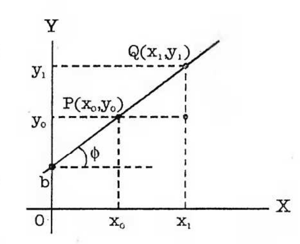


Fig. 1.4 Gráfica de la función lineal

En planos cartesianos numéricos, en los que la escala de los dos ejes es la misma, la pendiente de la recta se puede calcular como la tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal ($m = tg(\phi)$ en la Fig. 1.4), pero cuado la función lineal representa la relación entre dos magnitudes físicas, la pendiente adquiere un significado especial, ya no se puede afirmar que es igual a la tangente del ángulo de

inclinación pues el valor de dicho ángulo depende de las escalas y de las unidades en las que se midan las magnitudes representadas en los ejes x e y.
Por esta razón, en este texto siempre calcularemos el valor de la pendiente de acuerdo a la expresión $m = \Delta y / \Delta x$. Además, hay que mencionar que la tangente del ángulo de inclinación es adimensional, mientras que en una función que representa una relación lineal entre magnitudes físicas, la pendiente sí tiene dimensiones.
Por otro lado, si hacemos un análisis de una recta en función de su pendiente m, veremos que su inclinación depende de los valores positivos o negativos que puede tomar dicha pendiente, y un valor de pendiente igual a cero corresponde a una recta horizontal (ver la Fig. 1.5).

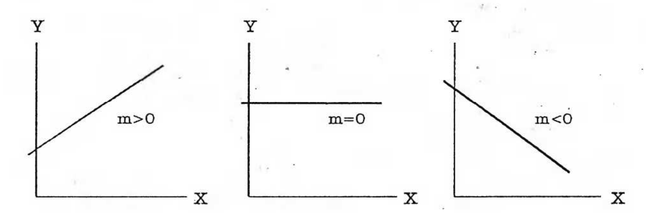


Fig. 1.5 Inclinación de la recta según la pendiente

Si dos rectas son paralelas, entonces tienen la misma pendiente, y si son perpendiculares, entonces el producto de sus pendientes es –1 (ver la Fig. 1.6)

$$m_1 \times m_2 = -1$$

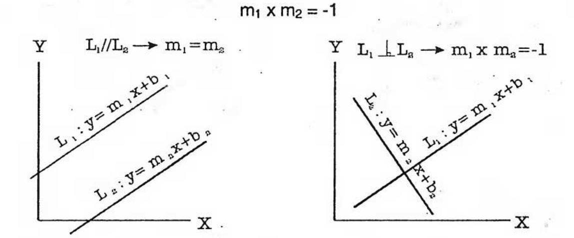


Fig. 1.6 Rectas paralelas y perpendiculares

Una función lineal representa en física, entre otras cosas, un ejemplo de función lineal es la relación entre la posición y el tiempo de un cuerpo que se mueve a velocidad constante, tal como se muestra en la Fig. 1.7.

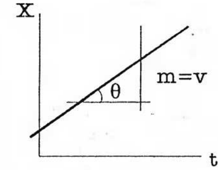


Fig. 1.7 Gráfica de la posición vs tiempo en MRU

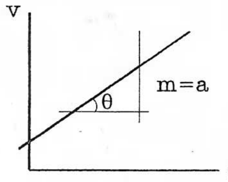


Fig. 1.8 Gráfica de la velocidad vs tiempo

Otro ejemplo, es la relación entre la velocidad y el tiempo de un cuerpo que se mueve con aceleración constante, tal como se muestra en la Fig. 1.8.

2.1.2 Función Cuadrática

Esta función se expresa mediante la siguiente ecuación: $y = a + bx + cx^2$ la cual se puede expresar convenientemente como:

$$(y - k) = C\,(x - h)^2$$

Donde (h,k) representa las coordenadas del vértice de la parábola y C es una constante que controla la mayor o menor abertura de las ramas (a mayor valor absoluto de C, las ramas de la parábola serán más cerradas). Además, si $C > 0$ la parábola se abre hacia arriba y si $C < 0$ la parábola se abre hacia abajo. La Fig. 1.9 muestra una parábola típica y la Fig. 1.10 muestra varias parábolas en función de C.

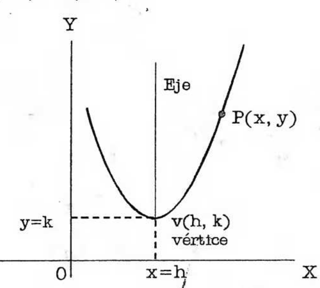
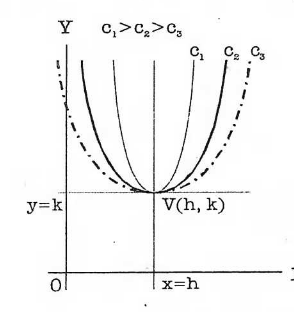


Fig. 1.9 Gráfica de una parábola vertical



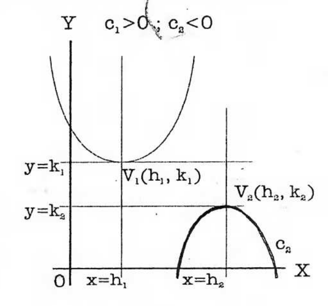


Fig. 1.10 Diferentes tipos de parábolas en función de C

En física, las parábolas representan entre otras cosas, la trayectoria que sigue un proyectil durante su vuelo cuando no se considera la resistencia del aire.

2.2 Intersecciones de gráficas

En muchos casos estamos interesados en determinar las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de dos funciones. Por ejemplo, podemos estar interesados en determinar el punto de intersección de la recta y la parábola definidas por:

$$y = x$$
$$y = (x - 2)^2$$

Sea P el punto de intersección buscado, con coordenadas (x_0, y_0). Este punto es tal, que sus coordenadas satisfacen las reglas de correspondencia de ambas funciones, por lo que podemos escribir:

$$y_0 = x_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$y_0 = (x_0 - 2)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

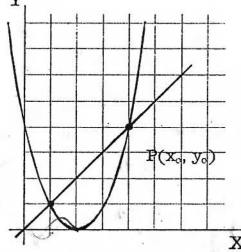


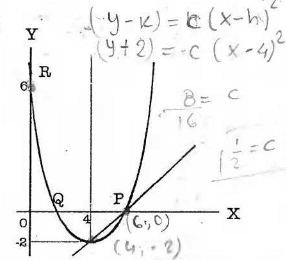
Fig. 1.11 Intersección de dos gráficas

Luego, se puede resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formado por las ecuaciones (1) y (2), y determinar los valores de x_0 e y_0. En nuestro caso, debido a que la ecuación (2) es cuadrática, encontraremos dos soluciones: $(x_0, y_0) = (1, 1)$ y $(x_0, y_0) = (4, 4)$. Estos resultados indican que existen dos puntos de intersección, tal como se ve en la figura Fig. 1.11.

EJEMPLOS

Prob 1.- Obtener la ecuación de la recta que corta a la parábola de vértice V(4, -2), tal como se muestra en el gráfico.

a) y = 2x - 2/5
b) y = 2x - 10
c) y = x + 10
d) y = -x - 0,7
e) y = x - 6



Solución:

La ecuación de la parábola es: $(y-k) = C(x-h)^2$. Para resolver el problema tenemos que encontrar primero los valores de k, h, y C.

Del gráfico: h = 4 y k = - 2

Usando estos valores y recordando que las coordenadas del punto R satisfacen la ecuación de la parábola:

$[6 - (-2)] = C(0 - 4)^2 \rightarrow \quad C = +1/2$

De donde la ecuación de la parábola es: $(y+2)=1/2(x-4)^2$

Ahora calcularemos las coordenadas del punto P que pertenece a la parábola:

$(0 + 2) = 1/2\ (x - 4)^2$ → $x = -2 + 4 = 2$ (punto Q)

$x = \pm 2 + 4$ → $x = +2 + 4 = 6$ (punto P)

La ecuación de la recta pedida es: $y = m x + b$, donde debemos encontrar m y b.

Calculamos m usando los puntos V y P que pertenecen a la recta:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_P-y_V}{x_P-x_V}=\frac{0-(-2)}{6-4}=1$$

La ecuación de la recta queda entonces como: $y = x + b$

También, como el punto P pertenece a la recta, sus coordenadas deben satisfacer su ecuación: $0 = 6 + b$ → $b = -6$

Finalmente, la ecuación de la recta pedida es: $y = x - 6$

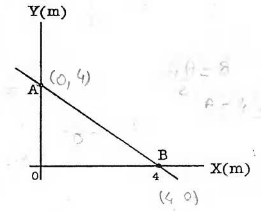
Respuesta: e)

Prob 2.- Si se sabe que el área del triangulo AOB es de 8 m^2, determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

a) $y + x = 4$ b) $y = 2x - 1$

c) $y = 8x - 1$ d) $y - x = 2$

e) $y - x = 4$



Solución:

De los datos tenemos que: $\text{área} = 8\,m^2 = \frac{OB \times OA}{2} = \frac{4 \times OA}{2}$ → $OA = 4m$

La ecuación de la recta es: $y = m x + b$ donde la pendiente es $m = \Delta y / \Delta x$

En nuestro caso: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-4}{4-0}=-1$

Por otro lado, puesto que OA = 4, entonces b = 4

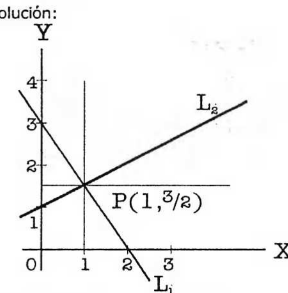
Por lo que la ecuación es: $y = -x + 4$

Respuesta: a)

Prob 3.- Las rectas L_1 y L_2, de pendientes m_1 y m_2, cortan al eje de ordenadas en los puntos (0,3) y (0,1) respectivamente. Si ambas rectas se interceptan en el punto (1, 3/2) ¿cuál es la relación de m_2/m_1?

a) 1/3 b) −1/3 c) 3 d) - 2/3 e) −3/4

Solución:



Calculamos las pendientes:

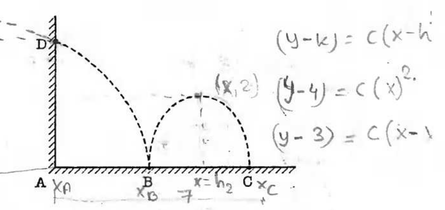
$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_R}{x_P - x_R} = \frac{3/2 - 3}{1 - 0} = -3/2$$

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{3/2 - 1}{1 - 0} = 1/2$$

luego: $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1/2}{-3/2} = -1/3$

Respuesta: b)

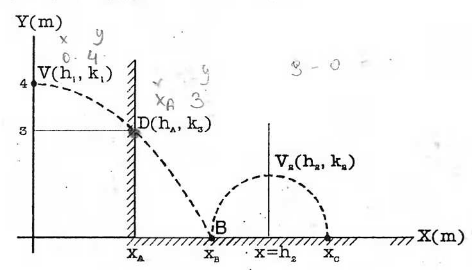
Prob 4.- El movimiento de una partícula sigue las trayectorias parabólicas mostradas. Si la ordenada del vértice de la segunda parábola es la mitad de la ordenada del vértice de la primera y el de ésta 4, hallar la ecuación de la segunda parábola sabiendo que AD = 3 m y AC = 7 m.



a) $y + 2 = -2/9\,(x - 5)^2$ b) $y - 6 = 1/2\,(x - 8)^2$ c) $y - 2 = -1/8\,(x - 6)^2$

d) $y - 2 = -2/9\,(x - 5)^2$ e) $y - 2 = -1/3\,(x + 5)^2$

Solución:



Sabiendo que las ordenadas de los vértices de las parábolas son en realidad los valores de las constantes k_1 y k_2 en su ecuación general, y que las coordenadas de los puntos B y D satisfacen la ecuación de la primera parábola:

En la primera parábola :

$3 = 4 - x_A^2 \rightarrow \quad x_A = 1$

$0 = 4 - x_B^2 \rightarrow \quad x_B = 2$

$k_1 = 4$

En la segunda parábola :

$k_2 = k_1 / 2 = 4 / 2 = 2$

$x_C = x_A + AC = x_A + 7 = 8$

$h_2 = x_B + BC / 2 = 2 + 6 / 2 = 5$

Por consiguiente, usando estos datos y sabiendo que el punto B pertenece a la parábola 2:

$$(y-k_2)=C_2(x-h_2)^2 \rightarrow \quad (0-2)=C_2(2-5)^2 \rightarrow \quad C_2=-2/9$$

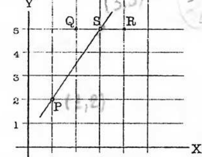
Finalmente, la ecuación de la parábola 2 es: $(y-2)=-2/9(x-5)^2$

Respuesta: d)

Prob 5.- Dados los puntos P(1,2), Q(2,4), y R(4,4), halle la ecuación de la recta que pasa por P y por el punto medio del segmento QR.

a) 3y = x + 1 b) 3y = 2x + 1 c) 2y = 3x + 1 d) 3y = x + 2 e) 2y = 3x + 2

Solución:



Para encontrar la ecuación de la recta: y = m x + b necesitamos la pendiente y la intersección b.

La pendiente m se determina conociendo los puntos P y S, y de la figura: P(1, 2) y S(3,5)

Luego: $m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_S-y_P}{x_S-x_P}=\dfrac{5-2}{3-1}=3/2$

Reemplazando en la ecuación de la recta las coordenadas del punto P:

y = 3/2 x + b → 2 = 3/2 (1) + b → b = 1 / 2

Finalmente: y = 3/2 x + 1/2

Respuesta: c)

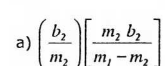
PROBLEMAS PROPUESTOS

Prob 1.- El desplazamiento horizontal de una partícula en función del tiempo está dado por la expresión: $x=2t+4$, y su desplazamiento vertical por la expresión: $y=5t-2$, donde t es el tiempo medido en segundos. Determine la ecuación de la trayectoria de la partícula en términos de x e y.

a) y = 5 x - 8 b) y = 5/2x -12 c) y = 2 x - 12 d) y = 5/2 x e) y = 12 x - 5

Prob 2.- En la figura mostrada, halle el área formada por las dos rectas y el eje x.

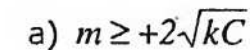
Y
$L_1: y=m_1x$
$L_2: y=m_2x+b_2$
X


a) $\left(\dfrac{b_2}{m_2}\right)\left[\dfrac{m_2\,b_2}{m_1-m_2}\right]$

b) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b_2}{m_2}\right)\left[\dfrac{m_2\,b_2}{m_1-m_2}\right]$

c) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b_2}{m_1}\right)\left[\dfrac{m_2\,b_2}{m_1-m_2}+b_2\right]$ d) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b_2}{m_2}\right)\left[\dfrac{m_2\,b_2}{m_1+m_2}+b_2\right]$ e) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b_2}{m_2}\right)\left[\dfrac{m_2\,b_2}{m_1-m_2}+b_2\right]$

Prob 3.- Halle la pendiente de cualquier recta que pase por el origen cortando a la parábola mostrada en el primer cuadrante.



a) $m \geq +2\sqrt{kC}$ b) $m \geq +2\sqrt{k^2C}$

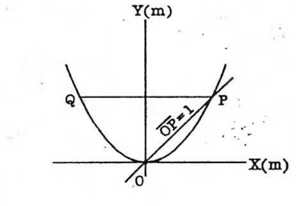
c) $m \geq +2\sqrt{k}$ d) $m \geq +2\sqrt{k/C}$

e) $m \geq +\sqrt{kC}/2$

Prob 4.- La relación entre la temperatura °F, en Fahrenheit y la temperatura °C, en Celsius, está dada por °F = 1,8 °C + 32. Halle la temperatura para la cual la medida en grados Fahrenheit y la medida en grados Celsius, coincidan numéricamente.

a) - 52 b) -20 c) - 40 d) - 73 e) -270

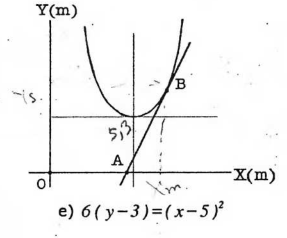
Prob 5.- Encuentre la pendiente de la recta que pasa por el origen y que corta a la parábola mostrada en un punto P tal que su distancia al origen es igual a la unidad.

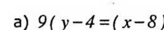


a) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$ b) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ c) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}-1}$ e) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

Prob 6.- Halle la ecuación de la parábola cuyo vértice tiene coordenadas (5,3), si la recta y = 4x/3 – 20/3 es tangente a la parábola en el punto B, como se muestra en la figura, y además, el segmento AB mide 5 m.

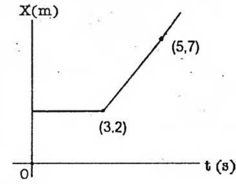


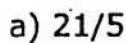
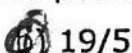


a) $9(y-4=(x-8)^2$ b) $8(y-3)=(x-5)^2$

c) $4(y-3)=(x-8)^2$ d) $9(y-3)=(x-5)^2$ e) $6(y-3)=(x-5)^2$

Prob 7.- La posición x de una partícula varía con el tiempo de acuerdo a la grafica mostrada. Determine en que tiempo partiendo de cero, la posición llega al doble de la posición inicial.



a) 21/5 b) 19/5

c) 16/5 d) 11/2 e) 9/2

Prob 8.- Determine la ecuación de la recta L que es paralela a la recta $y = 3x - 5$, y que pasa por el punto (2, 6)

a) $y = 3x-10$ b) $y = 3x$ c) $y = 3x+10$ d) $y = 3x-15$ e) $y = 3x-12$

Prob 9.- Determine las coordenadas del vértice de la parábola $y = 4x^2 + 2x + 3$

a) (1/2, 2) b) (2, 1/2) c) (1/2, -1/2) d) (1/2, 4) e) (-1/2, 2)

Prob 10.- Un segmento rectilíneo de longitud 6 se mueve de tal forma que uno de sus extremos permanece siempre en el eje x y el otro extremo en el eje y. Halle la expresión de la relación de las coordenadas (x, y) del punto medio del segmento

a) $x^2 + y^2 = 12$ b) $x + y^2 = 9$ c) $x^2 + y = 9$ d) $x + y = 9$ e) $x^2 + y^2 = 9$

Prob 11.- Halle la distancia desde el origen de coordenadas al punto inferior de la parábola $y = (x-2)^2 + 4$

a) $3\sqrt{5}$ b) $5\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $\sqrt{7}$ e) $7\sqrt{2}$

1.2 MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

Las magnitudes como el tiempo, la temperatura, la masa y otras, para ser referidas requieren de una unidad patrón y del número de veces que la medición comprende a dicha unidad. Ejemplo al medir la masa de cierto libro se obtiene 2.5 kg, esto indica que la masa del libro es 2,5 veces la masa de un kilogramo patrón. Sin embargo, otras magnitudes como la velocidad, la aceleración y otras, a parte de la unidad patrón y del número de veces que ésta es contenida en la medición, requieren de la indicación de dirección y sentido. Así para referirnos a la velocidad de un automóvil, debemos indicar la lectura en el velocímetro y además en qué línea y sentido se esta moviendo. Por ejemplo se debe decir la velocidad del automóvil es de 20 km/h de norte a sur, la dirección es la línea norte-sur y el sentido hacia el sur. Estas magnitudes se denominan magnitudes vectoriales y las denotaremos con letras en negrita como a continuación **A, B, C, D**, etc., también **a, b, c, d,** etc., o también con letras sobre las cuales se coloca una flechita ($\vec{a}$). Gráficamente un vector se representa mediante una flecha. A continuación tenemos las diferentes opciones para la representación y notación de un vector.

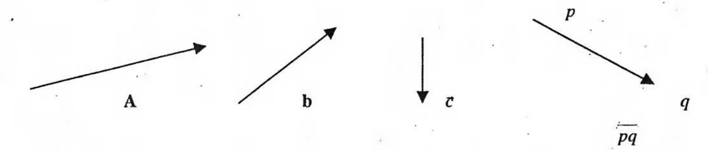


Figura 1.26

Una flecha puede desplazarse a otro lugar conservando su tamaño y siempre representará al mismo vector. El tamaño (en cierta escala incluyendo unidades) de estas flechas representa el módulo del vector, aquí en el libro el módulo se denota con la misma letra que el vector pero no en negrita.

A = módulo de **A**

Adición de vectores

Para adicionar vectores gráficamente, se les dispone en sucesión, como se indica a continuación y el vector resultante es un vector que va del origen del primer vector hasta el final del último sumando. (Ver figura 1.27).

Ejemplo 1. Sumar los vectores **a, b** y **c**



Figura 1.27

Vector - A. El negativo de **A** es un vector que tiene el mismo módulo pero sentido inverso

Vector cero. Es el vector resultante de un vector con el negativo del mismo vector, esto es **a** + (- **a**) = **0**

Propiedad conmutativa. La adición de los vectores es conmutativa es decir **a** + **b** = **b** + **a**

Propiedad asociativa. Esta propiedad significa: **a** + (**b** + **c**) = (**a** + **b**) + **c**

Resta de vectores

La resta de vectores es la adición de un vector con el negativo de otro vector, de esta manera la resta puede considerarse como un caso particular de la adición: **a** - **b** = **a** + (- **b**), gráficamente esto significa

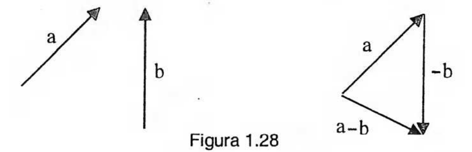


Figura 1.28

Estos procedimientos son generales, valen para adición y resta de 2 o más vectores. No hay limitación, mas que el cuidado de respetar el módulo y sentido de los vectores al trasladarlos.

Ejemplo 2. Verificar la propiedad conmutativa de la adición

Solución (Ver figura 1.29)

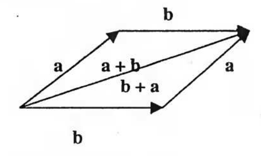


Figura 1.29

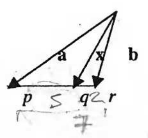


Figura 1.30

Ejemplo 3. En la figura 1.30, pq = 5unidades, qr = 2unidades, exprese **x** en términos de **a** y **b**

Solución

De la figura: $\mathbf{x} + qp = \mathbf{a}$, $qp = (1/7)(5rp)$ y $rp = \mathbf{a} - \mathbf{b}$

Entonces: $\mathbf{x} = \mathbf{a} - qp = \mathbf{a} - (1/7)(5\,rp) = \mathbf{a} - (1/7)[5\,(\mathbf{a} - \mathbf{b})]$

$$\mathbf{x} = (1/7)\,(2\mathbf{a} + 5\mathbf{b})$$

Ejemplo 4. En el cubo de la figura 1.31, calcule el vector que va de p hasta q, estando p a 1/3 de la base inferior.

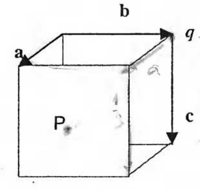


Figura 1.31

Solución

En la figura $\mathbf{a} + (2/3)\mathbf{c} + pq = \mathbf{b}$

de donde

$$pq = \mathbf{b} - \mathbf{a} - (2/3)\mathbf{c}.$$

Ejemplo 5. Demostrar que las medianas de un triángulo se intersectan entre sí en un punto de trisección.

Solución

En la figura 7 R y S son puntos medios de los lados **a** y **b,** I punto de intersección de las medianas. En el triángulo ARC $\mathbf{e} + (1/2)\mathbf{a} = \mathbf{b}$

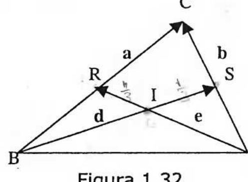


Figura 1.32

En el triángulo BSC $\mathbf{d} + (1/2)\mathbf{b} = \mathbf{a}$

El vector IR es una fracción x de **e**

El vector IS es una fracción y de **d**

En el cuadrilátero IRCSI se tiene

$$x\mathbf{e} + (1/2)\mathbf{a} = y\mathbf{d} + (1/2)\mathbf{b}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores se pueden eliminar **e** y **d,** obteniéndose

$$[(-\tfrac{1}{2})\,x + \tfrac{1}{2} - y]\mathbf{a} = [(-\tfrac{1}{2})y + \tfrac{1}{2} - x]\mathbf{b}$$

Puesto que **a** y **b** no son paralelos, la ecuación es válida sólo si cada corchete es cero. Resolviendo las ecuaciones: $x = y = 1/3$. Es decir, I es punto de trisección de cada mediana.

Ejemplo 6. En la figura 1.33, *c* es punto medio **a,** y *d* está a 1/3 de *c* sobre la perpendicular al vector **a**, exprese **x** en términos de **a** y **b**.

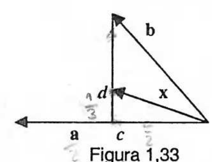


Figura 1,33

Solución

En la figura $\mathbf{a}/2 + cd = \mathbf{x}$

Puesto que $cd = 1/3(\mathbf{b} - \mathbf{a}/2)$, reemplazando en la ecuación anterior y despejando se obtiene

$$\mathbf{x} = (1/3)(\mathbf{b} + \mathbf{a})$$

Componentes de un vector

Gráficamente las componentes de un vector **A,** son vectores, a lo largo de ciertas líneas, tales que su resultante es el vector **A**. Por ejemplo los vectores **B** a lo largo de ℓ y **C** a lo largo de *t* son las componentes de **A** en las direcciones ℓ y *t*(Ver figura 1.34), estas componentes se denotarán $\mathbf{A}_\ell$ y $\mathbf{A}_t$ respectivamente. Si se hubieran elegido las direcciones *m* y *n* se tuviera los componentes $\mathbf{A}_m$ y $\mathbf{A}_n$ de **A** en dichas direcciones (Ver figura 1.35).

En general, es posible hallar las componentes de un vector en cualquier dirección, según sea el requerimiento para determinado análisis. Pero aquí, se considerarán las componentes en direcciones perpendiculares (ortogonales).

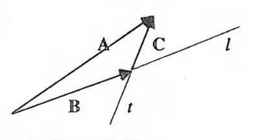


Figura 1.34

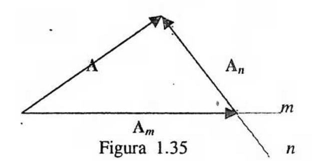


Figura 1.35

Componentes en un sistema de coordenadas cartesianas

Ahora veremos el caso usual de componentes de vectores en sistemas de coordenadas cartesianas, los cuales están constituidos por ejes perpendiculares entre sí. En dos dimensiones los ejes son X, Y en tanto que en tres dimensiones los ejes son X, Y, Z, tal como se ve en las figuras 1.36 y 1.37

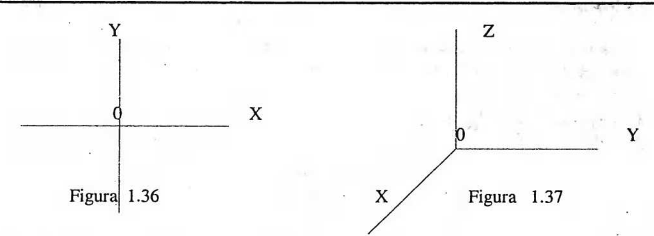


Figura 1.36

Figura 1.37

En estos sistemas de ejes coordenados los vectores se representan empleando vectores de tamaño unitario los cuales vienen con el sistema, uno según cada uno de los ejes. Según X: **i**, según Y: **j**, según Z: **k**, como se muestra en la figura1.38. Las componentes de **A** se denotan $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ y $\mathbf{A}_z$ como se indica en la figura139.

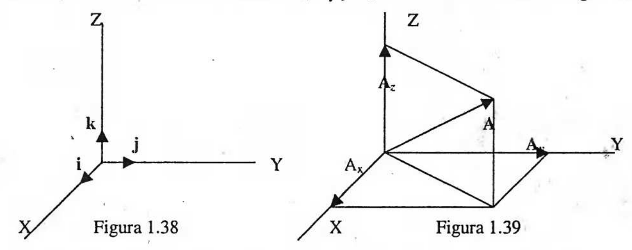


Figura 1.38

Figura 1.39

vectores unitarios se expresan así: $\mathbf{A}_x = A_x\,\mathbf{i}$, $\mathbf{A}_y = A_y\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{A}_z = A_z\,\mathbf{k}$. Los valores A_x, A_y y A_z son las proyecciones del vector **A** según los ejes coordenados, estas proyecciones tienen valores positivos o negativos según el signo del semieje donde se ubiquen.

En el plano X-Y los valores de las proyecciones se calculan mediante las siguientes relaciones

$$A_x = A\cos\theta \qquad (1)$$

$$A_y = A\,\mathrm{sen}\theta, \qquad (2)$$

donde A es el módulo del vector y θ es el ángulo medido desde el eje X en sentido antihorario hasta el vector **A**, el ángulo en sentido horario se considera con signo negativo.

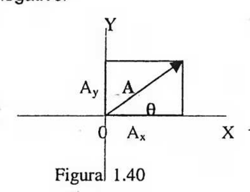


Figura 1.40

Ejemplo 7. Calcule las componentes del vector **A** de módulo 8,00 unidades que forma con el eje X un ángulo de 30°

Solución

Calculando las proyecciones sobre los ejes.

$$A_x = A\cos\theta = 8\cos 30° = 8(0{,}87) = 6{,}96$$

$$A_y = A\,\mathrm{sen}\theta = 8\,\mathrm{sen}\,30° = 8(0{,}5) = 4{,}00$$

Las componentes son: $\mathbf{A}_x = 6{,}96\,\mathbf{i}$

$\mathbf{A}_y = 4{,}00\,\mathbf{j}$

Ejemplo 8. En el ejemplo anterior consideremos que **A** tiene el mismo módulo pero el ángulo θ es - 30º. Calcule las componentes y exprese el vector **A**.

Solución.

$$A_x = A\cos\theta = 8\cos(-30^{\circ}) = 8(0{,}87) = 6{,}96$$

$$A_y = A\,\text{sen}\theta = 8\,\text{sen}(-30^{\circ}) = 8(-0{,}5) = -4{,}00$$

$\mathbf{A}_x = 6{,}96\,\mathbf{i}$ $\mathbf{A}_y = -4{,}00\,\mathbf{j}$ $\mathbf{A} = 6{,}96\,\mathbf{i} - 4{,}00\,\mathbf{j}$

Módulo de un vector en coordenadas cartesianas

Conocidas las componentes de un vector es posible calcular su módulo mediante

$$A = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}} \qquad (3)$$

Vector unitario u

El vector unitario de un vector **A** se calcula mediante:

$\mathbf{u}_A = \mathbf{A}$ / módulo del vector (4)

$(\mu_A |\mathbf{A}| = A)$

Distancia entre dos puntos

En este sistema de coordenadas, en tres dimensiones un punto se expresa mediante terna ordenada de números, mientras que en dos dimensiones mediante un par ordenado, así los puntos P en tres dimensiones y Q en dos dimensiones se denotan:

P(x,y,z) Q(x,y)

Donde x, y, z ó x, y son números de los ejes reales X,Y o Z contados a partir del origen y que generan los puntos P o Q. Dados los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, la distancia entre ellos se calcula según la siguiente fórmula.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (6)$$

En dos dimensiones, en el plano X-Y, la fórmula es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (7)$$

Adición de vectores por componentes.

Dados los vectores

$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\,\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_x\,\mathbf{i} + C_y\,\mathbf{j} + C_z\,\mathbf{k}$

el vector resultante (suma) es

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (A_x + B_x + C_x)\,\mathbf{i} + (A_y + B_y + C_y)\,\mathbf{j} + (A_z + B_z + C_z)\,\mathbf{k}.$$

En general para sumar n vectores, el vector resultante es:

$$\mathbf{R} = \Sigma\,(C_x)\,\mathbf{i} + \Sigma\,(C_y)\,\mathbf{j} + \Sigma\,(C_z)\,\mathbf{k} \qquad (8)$$

Donde $\Sigma\,(C_x)$ quiere decir sumatoria de componentes en el eje X, $\Sigma\,(C_y)$ sumatoria de componentes en el eje Y y $\Sigma\,(C_z)$ sumatoria de componentes en el eje Z.

En el caso de resta de vectores o de operaciones de suma y resta combinadas se aplica la misma fórmula, sólo es cuestión de tomar en cuanta el signo negativo al momento de la resta.

En dos dimensiones, por ejemplo en el plano X.Y, esta fórmula es:

$$\mathbf{R} = \Sigma\,(C_x)\,\mathbf{i} + \Sigma\,(C_y)\,\mathbf{j} \qquad (9)$$

Angulo que forma el vector resultante con el eje X, en el plano X-Y

Designando con θ el ángulo que forma el vector resultante con el eje X, su valor se obtiene a partir de la figura 1.41, mediante la ecuación (10)

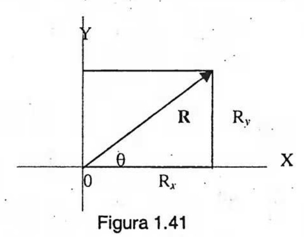


Figura 1.41

$$\tan\theta = [\,\Sigma\,(C_y)\,/\,\Sigma\,(C_x)\,] \qquad (10)$$

Ejemplo 9. Los vectores **A**, **B** y **C** ubicados en el plano X-Y tienen módulos A = 10 unidades, B = 20 unidades, C = 30 unidades y forman con el eje X los siguientes ángulos $\theta_A = 30^{o}$, $\theta_B = 120^{o}$ y $\theta_C = 45^{o}$. Calcule (a) el vector resultante y (b) el ángulo que forma la resultante con el eje X.

Solución

(a)

$A_x = A\cos\theta_A = 10\cos 30^{o} = 5\sqrt{3}$, $B_x = B\cos\theta_B = 20\cos 120^{o} = 20(1/2) = 10$

$A_y = A\,\text{sen}\theta_A = 10\,\text{sen}30^{o} = 5$, $B_y = B\,\text{sen}\theta_B = 20\,\text{sen}120^{o} = -20(\sqrt{3}/2) = -5\sqrt{3}$

$C_x = C\cos\theta_C = 30\cos 45^{o} = 15\sqrt{2}$, $C_y = C\,\text{sen}\theta_C = 30\,\text{sen}45^{o} = 15\sqrt{2}$

$$\mathbf{R} = \Sigma(C_x)\,\mathbf{i} + \Sigma(C_y)\,\mathbf{j} = (5\sqrt{3} + 10 + 15\sqrt{2})\,\mathbf{i} + (5 - 5\sqrt{3} + 15\sqrt{2})\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R} = 19{,}8\,\mathbf{i} + 8{,}85\,\mathbf{j}$$

(b)

$\tan\theta = [\Sigma(C_y)/\Sigma(C_x)] = (8{,}85/19{,}8)$, entonces $\theta = 78{,}7^{o}$

Ejemplo 10. Dados los siguientes vectores **A** = 3 **i** + 2 **j**, **B** = 2 **i** + 3 **j**, calcule (a) **A** – **B**, (b) el ángulo que forma **A** – **B** con el eje X.

Solución

(a) **A** – **B** = (3 **i** + 2 **j**) – (2 **i** + 3 **j**) = **i** – **j**,

(b) $\tan\theta = [\Sigma(C_y)/\Sigma(C_x)] = (-1/1) = -1$, resultando $\theta = -45^{o}$

Ejemplo 11. A partir de la figura 1.42 calcule **A** – 3**B** y el ángulo que forma **A** + 3**B** con el eje Y.

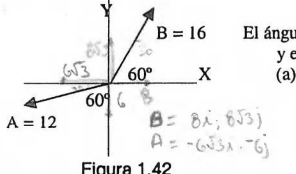


Figura 1.42

Solución

El ángulo θ se mide desde el semieje positivo de las X y en sentido antihorario.

(a) **A** = 12 cos 210° **i** + 12 sen 210° **j**

A = 12(-√3/2) **i** + 12(- 1/2) **j**

B = 16 cos 60° **i** + 16 sen 60° **j**

B = 16(1/2) **i** + 16(√3/2) **j**

$\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = 12(-\sqrt{3}/2)\,\mathbf{i} + 12(-1/2)\,\mathbf{j} - 3[16(1/2)\,\mathbf{i} + 16(\sqrt{3}/2)\,\mathbf{j}] = -34\,\mathbf{i} - 47{,}6\,\mathbf{j}$

(b)

$\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = 12(-\sqrt{3}/2)\,\mathbf{i} + 12(-1/2)\,\mathbf{j} + 3[16(1/2)\,\mathbf{i} + 16(\sqrt{3}/2)\,\mathbf{j}] = 13{,}6\,\mathbf{i} + 35{,}6\,\mathbf{j}$

Para calcular el ángulo β que forma este vector con el eje Y, en lugar de la ecuación (10) emplearemos $\tan\beta = [\Sigma(C_x)/\Sigma(C_y)] = (13{,}6/35{,}6)$, obteniéndose $\beta = 20{,}9^{o}$.

Verifique la validez de esta ecuación.

Ejemplo 12. Dados los vectores **A** = - **i** + 2**j** + 8**k**, **B** = 5**i** + 5**j** + **k**, **D** = **i** + 2**j** + 2**k**, calcule (a) **A + 2B –3D,** (b) el ángulo que forma este vector con el eje Z y (c) el vector unitario del mismo.

Solución

(a) **R** = **A** + 2**B** –3**D** = (- **i** + 2**j** + 8**k**) + 2(5**i** + 5**j** + **k**) - 3(**i** + 2**j** + 2**k**)

R = **A** + 2**B** –3**D** = 6**i** + 6**j** + 4**k**

(b) La figura 1.43 representa a este vector, donde se muestran además sus proyecciones en el plano X-Y R_{xy} y en el eje Z R_z, el ángulo γ es tal que tan γ = (R_{xy} / R_z)

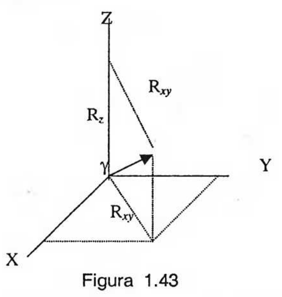


Figura 1.43

Cálculo de R_{xy}

En el plano X-Y, según ecuación (7)

$$R_{xy} = \sqrt{(\sum C_x)^2 + (\sum C_y)^2}$$

$$R_{xy} = \sqrt{6^2 + 6^2}$$

$$R_{xy} = 6\sqrt{2}$$

Por tanto tan γ = (6 $\sqrt{2}$ / 4)

Obteniéndose γ = 64,8°

(c) $\mathbf{u}_R$ = **R**/ R = (6**i** + 6**j** + 4 **k**)/ $\sqrt{36+36+16}$ = (3**i** + 3**j** +2**k**)/$\sqrt{11}$

PRODUCTO ESCALAR

Aparte de las operaciones de adición y sustracción de vectores, desarrollaremos otras dos operaciones (producto escalar y producto vectorial) que son de gran utilidad en un curso de física a nivel pre-universitario.

El **producto escalar de vectores** de dos vectores **A** y **B** se denota así

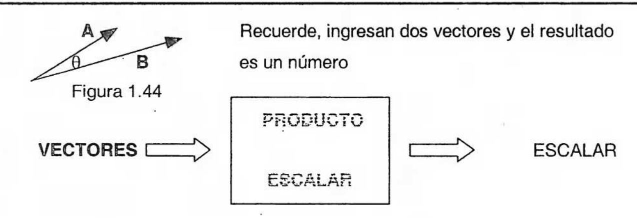
A . B

Se lee: Producto escalar de A por B, A punto B o A escalarmente por B

Se define mediante la relación:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A\,B \cos\theta \qquad (11)$$

donde A y B son los módulos de **A** y **B** y θ es el ángulo que forman entre sí dichos vectores, como se muestra en la figura 1.44 Se puede notar que el resultado es un escalar, es decir: un número. He aquí la razón de su nombre.



Interpretación geométrica.

Esta operación se puede interpretar geométricamente teniendo en cuenta el segundo miembro de la ecuación que la define.

En la ecuación (11) el factor Bcosθ del segundo miembro es, según la figura 1.45, la proyección de **B** sobre **A**, esto es *pq*. De otro lado la ecuación (11) se puede escribir también como **A . B** = BA cosθ, aquí Acosθ, según la figura 1.46, es la proyección de **A** sobre **B**, esto es *ps*.

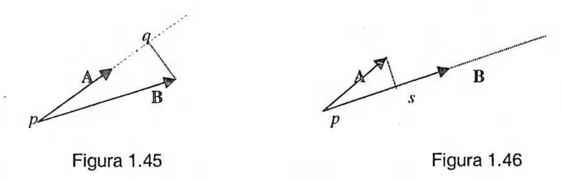


Figura 1.45 Figura 1.46

Así: **A . B** = A B cos θ = A x proyección de **B** sobre **A**

A . B = A B cos θ = B x proyección de **A** sobre **B**

Conclusión: Geométricamente el producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno (cualesquiera) de ellos por la proyección del otro sobre el primero

Comentario: Como se aprecia el producto escalar de dos vectores es útil para calcular la proyección de un vector sobre otro, así como también se le emplea para calcular el ángulo entre dos vectores.

Propiedad conmutativa

A partir de la definición del producto escalar se pueden conmutar los módulos de A y B para deducir la propiedad conmutativa de este producto.

A . B = A B cos θ = B A cos θ = **B . A**

Es decir

A . B = **B . A** (12)

Ejemplo 13. Dados los vectores **A** = 4**i** + 3**j** + 7**k** y **B** = -2**i** + 6**j** + 4**k**. Calcule (a) **A . B**, (b) **A . A** y (c) B^2.

Solución

(a) En este ejemplo no se podría aplicar la definición directamente porque no se conoce el ángulo que forman los vectores, pero se puede expresar cada vector en términos de sus componentes y desarrollar aplicando la definición en los productos escalares de los vectores unitarios como a continuación.

A . B = (4i + 3j + 7k).(-2 **i** + 6j + 4k) = - 8 **i . i** + 24 **i . j** + 16 **i . k** - 6 **j . i** + 18 **j . j** +

12 **j . k** - 14 **k . i** + 42 **k . j** + 28 **k . k**

Para efectuar los productos escalares entre los vectores unitarios, note que los vectores **i, j** y **k** son perpendiculares entre sí y en el producto de un vector consigo mismo el ángulo es cero.

i . j = 1 x 1 cos(90º) = 0 **i . i** = 1 x 1 cos(0º) = 1 etc. Teniendo en cuenta estos resultados de todos los productos escalares se obtiene:

A . B = - 8 + 18 + 28 = 38

(c) **A . A** = (4i + 3j + 7k) . (4i + 3j + 7k) = 16 + 9 + 49 = 74, también se puede calcular teniendo en cuenta la fórmula que define a esta operación.

A . A = A x A cos 0º = $A^2 = \sqrt{16+9+49}\ \sqrt{16+9+49}$ = 74 que es igual al resultado anterior. Por tanto **A . A** = A^2

(d) B^2 = **B . B** = $(\sqrt{4+36+16})^2$ = 56

Ejemplo 14

Calcule el cuadrado del módulo del vector resultante de dos vectores, si se conocen su módulo y el ángulo que forman entre sí.

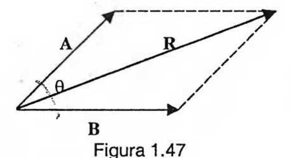


Figura 1.47

Solución

Considerando que el ángulo entre los vectores es θ, y teniendo en cuenta el ejemplo 13 debemos calcular

R^2 = **R . R** = (**A** + **B**) . (**A** + **B**)

R^2 = **R . R** = **A . A** + **A . B** + **B . A** + **B . B**

$R^2 = A^2 + AB\cos\theta + BA\cos\theta + B^2$, finalmente permutando BA se obtiene

$$R^2 = A^2 + 2\,AB\cos\theta + B^2 \qquad (13)$$

Esta expresión es conocida como la **ley de cosenos.** Como se aprecia esta fórmula permite calcular el módulo del vector resultante de dos vectores, siempre que se conozca el módulo de cada vector y el ángulo entre ellos cuando el origen de las flechas es común.

Ejemplo 15

Los vectores **A** y **B** de la figura 1.48 son perpendiculares entre sí y tienen módulos 8 y 6 respectivamente. Halle la proyección de **A – B** sobre **A + B.**

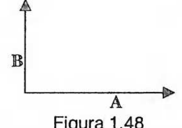


Figura 1.48

Solución

Si los vectores son perpendiculares entre sí entonces **A – B** y **A + B** estan sobre las hipotenusas de los triángulos de la figura 1.49.
Para determinar la proyección de **A – B** sobre **A + B,** nos ayudamos de esta figura, donde se ha elegido el vector **A** según X y el vector **B** según Y, además vemos que el módulo de **A – B** y el módulo de **A + B** valen 10 unidades.

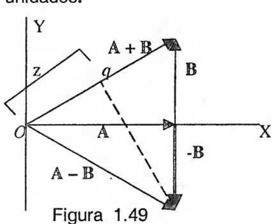


Figura 1.49

Según la definición de producto escalar

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,.\,(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = (10)(10)\cos\theta$$

Según la interpretación geométrica del producto escalar, el segundo miembro es igual a 10 por la proyección de (**A – B**) sobre (**A + B**) que es Oq y denominamos z.
De otro lado el primer miembro es:
$(8\mathbf{i} + 6\mathbf{j})\,.\,(8\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) = 64 - 36 = 28$

Igualando los miembros de la ecuación resulta: $28 = 10\,z$

Por consiguiente la proyección de la diferencia sobre la suma de **A** y **B** vale z = 2,8

Ejemplo 16

Se tiene el vector **A** = 4**i** + 2**j**+ 7**k,** determine el vector unitario cuyo producto escalar con **A** es mímimo.

Solución.

Según la ecuación (11) el producto escalar es mínimo si el ángulo entre los vectores es de 180º, por tanto el vector unitario que se busca es:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{A}/A = -(4\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 7\,\mathbf{k})/\sqrt{69}$$

Ejemplo 17

¿Para qué ángulo entre dos vectores el producto escalar es la mitad de su valor máximo?

Solución

El producto escalar es según la ecuación (11) **A . B** = A B cos θ, el valor máximo ocurre cuando θ vale 0º, es decir $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{máximo}$ = A B. Para que el producto sea la mitad del valor máximo se debe tener

$$A\,B \cos\theta = (1/2)\,AB, \quad \text{por tanto } \theta = 60^{\circ}$$

PRODUCTO VECTORIAL

Esta operación se denota **A x B** y se lee A vectorialmente por B, A aspa B o también producto vectorial de A y B. Definición:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = A\,B \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{u} \qquad (14)$$

En esta ecuación θ es el menor ángulo entre **A** y **B** como se indica en la figura 1.50, y **u** es un vector unitario perpendicular al plano definido por **A** y **B** cuyo sentido se establece mediante la regla de la mano derecha.

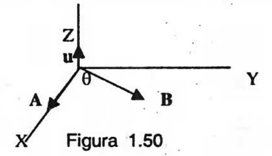
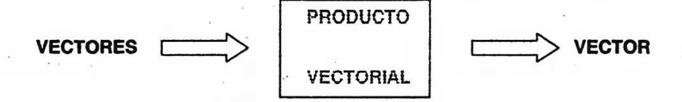


Figura 1.50

Regla de la mano derecha " Se extiende la mano derecha según el primer factor (**A**) y se cierra hacia el segundo factor (**B**), el pulgar extendido indica el sentido de **u,** que es el sentido del producto vectorial **A** x **B**"

Comentario: La regla de la mano derecha es de gran utilidad en el estudio de fenómenos físicos donde interviene el producto vectorial como por ejemplo torque de una fuerza, fuerza magnética sobre una carga en movimiento etc.

En esta operación, a diferencia del producto escalar, el resultado es un vector. Esta característica la podemos representar esquemáticamente de la siguiente manera.



Interpretación geométrica.

El producto vectorial tiene una interpretación geométrica que se puede deducir del módulo del producto en la ecuación (14).

Módulo de **A x B** = A B sen θ . Note que al tomar el módulo en la ecuación ,ya no figura el vector **u** porque su módulo es la unidad. En la figura 1.51 se aprecia que B senθ es la altura del paralelogramo de lados A y B. Así, el módulo de **A x B** es el área del paralelogramo de lados A y B. Teniendo en cuenta el carácter vectorial del producto, éste resulta ser un vector perpendicular al plano que definen **A** y **B**, cuyo módulo es el área del paralelogramo de lados A y B.

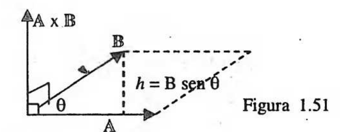


Figura 1.51

Recuerde el vector área de un paralelogramo es un vector perpendicular a la superficie y de módulo igual al área.

Ejemplo 19

¿En la figura 1.52, cómo varía el producto vectorial de **A** y **B**, cuando **B** cambia de la posición 1 a la posición 2 y finalmente a la posición 3 ?. Considere que **A** y **B** siempre se encuentran en el plano de la hoja de papel.

Solución

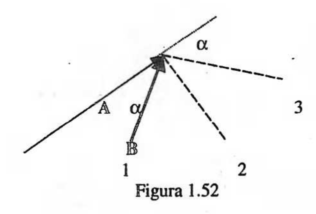


Figura 1.52

Deslizando los vectores hasta hacer que coincidan sus orígenes, como se observa, figura 1.53 y empleando la regla de la mano derecha se deduce que el sentido del vector **A x B** en los tres casos es saliente y su módulo cuando **B** se ubica sobre 1 ó 3 es el mismo, pero cuando **B** se ubica sobre 2, los vectores forman entre sí, un ángulo cercano a, 90º por lo que el módulo del producto vectorial, cuando **B** está en dicha posición, será de máximo valor y aproximadamente igual a AB.

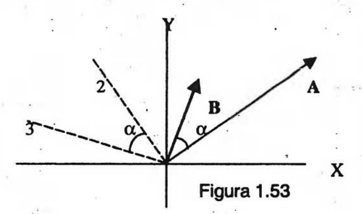


Figura 1.53

Ejemplo 18.

Dados los vectores **A** = 2 **i** + 4 **j** + 8 **k** y **B** = - 4 **i** + 7 **j** + 13 **k**, calcule la altura del paralelogramo respecto al lado **A.** Asuma unidades arbitrarias.

Solución.

La altura que se pide es B sen θ, reemplazando datos en la ecuación (14) **A** x **B** = A B sen θ **u** y tomando el módulo de cada miembro:

Módulo de [(2 **i** + 4 **j** + 8 **k**) x (- 4 **i** + 7 **j** + 13 **k**)] = $\sqrt{4+16+64}$ (altura)

= $\sqrt{84}$ (altura) (*)

desarrollando los productos vectoriales en el corchete

-8**i** x **i** + 14**i** x **j** + 26**i** x **k** - 16**j** x **i** + 28**j** x **j** + 52**j** x **k** - 32**k** x **i** + 56**k** x **j** + 104**k** x **k**

Los productos vectoriales se desarrollan mediante la ecuación (14), teniendo en cuenta que los vectores unitarios son perpendiculares entre sí. Los resultados se deducen enseguida.

Ejemplos. **i x i** = 1 x 1 sen 0º **u** = **0**, el resultado es el vector cero, **i x j** = 1 x 1 sen 90 **u**

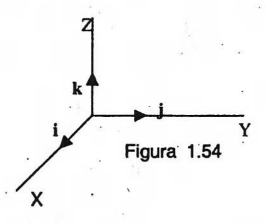


Figura 1.54

Por la regla de la mano derecha, **u** es perpendicular al plano formado por los vectores **i**, **j** en el sentido del eje Z, entonces **u** es **k**. Verifique que **j** x **k** = **i**, **k** x **j** = - **i**.
Haciendo todas las operaciones se obtiene:

14 **k** – 26 **j** + 16 **k** + 52 **i** - 32 **j** – 56 **i** =

- 4 **i** -58 **j** + 30 **k**, su módulo es $\sqrt{4280}$

Reemplazando estos resultados en (*) $\sqrt{4280} = \sqrt{84}$ (altura), entonces

altura = 7,1 unidades.

Ejercicios

1. **Halle la proyección del vector a sobre b** si estos forman entre sí un ángulo de **60º y los módulos son** 10 unidades y 20 unidades respectivamente.

2. Se tienen los vectores **a** = **2i** +**3j** + **4k** y **b** = -**2j** + **4k**. (a) Hallar el vector unitario u_1 de **a** – **4b** y el vector unitario de **3a** + **2b.** (b) Calcule la suma de estos vectores unitarios.

Respuesta: $u_1 = (2i + 11j - 12k)/\sqrt{269}$

3. En la figura 1.55 calcule **A** +**3B** y la proyección de este vector sobre el eje Y. **Respuesta**

   40,12u **i** – 0,86u **j**. La proyección es 40,12 u.

4. En la figura 1.56 calcule el vector resultante de los tres vectores que se encuentran dentro de la circunferencia de radio 2m. **Respuesta:** El vector cero.

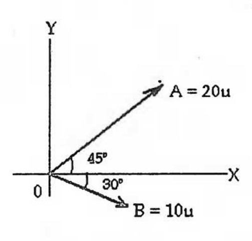


Figura 1.55

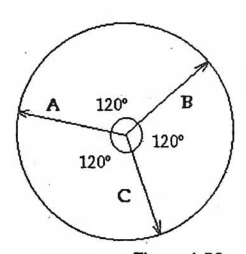


Figura 1.56

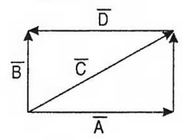
5. ¿Qué sentido vectorial tiene el producto **A** X **B** y el producto **B** x **A** de la figura 1.55? ¿Qué sentido tiene el producto **C** x **A** en la figura 1.56. Recuerde la regla de la mano derecha?

Respuesta: Sentido de **A** x **B** entrante (según – Z)

6. En un cubo de lado *l*, ubicado en el primer octante de un sistema de ejes X-Y-Z, se encuentran 7 vectores que se dirigen – todos – desde el origen a cada uno de los vértices del cubo. Calcule la suma de estos vectores. **Respuesta.** 4*l* (**i** + **j** + **k**)

7 . Se muestra un conjunto de vectores en un rectangulo de 4mx3m.
Halle el modulo e indique la direccion, del resultado de cada una de las siguientes operaciones:

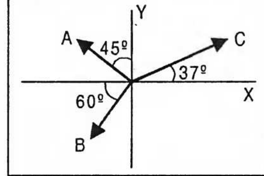
a) **A+B** b) **A-B**
c) **A+B+C+D** d) **A+B+E**



a) C c) B + C

8 . Tres vectores se orientan como se muestra en la figura, donde A = 20 unid., B = 40 unid. y C = 30 unid.
Encontrar:

a) Las componentes del vector resultante R a lo largo del eje X y del eje Y, respectivamente.
b) El ángulo que forma el vector resultante con el eje +Y.



R_x = -10.14μ , R_n = -2,49, θ = -13.79º

9 . Dado los vectores **A** = -3**i** + 2**j** – **k**, **B** = **i** + **j** y **C** = -4**j** –2**k** . Encontrar :

a) **R** =+**A**-3**B** y **S** = 2**B**+3**C**
b) El ángulo que forman los vectores **R** y **S**.
d) El ángulo que forma el vector **S** con el eje Z.

a) –6**i** – **j** – **k** b) 144,2º c) 63,43º respecto a – z

10 Un caminante sale de la ciudad A siguiendo la siguiente ruta: 10 km hacia el norte, 20 km en la dirección N-30^0–E, 15 km al este y 10 km al sur llegando a la ciudad E. ¿Qué distancia recorrió y que distancia hay entre las ciudades A y E?.

40 km, 20 km

Vector position, [illegible]

[illegible]

Video: universo mecanico : mas alla



Cinemática

INTRODUCCIÓN

Con este título nos referimos al movimiento de los cuerpos o de partículas sin tener en cuenta las causas que lo generan.

En general el movimiento es un asunto complicado, si por ejemplo hablamos del movimiento de una bolita que se lanza al piso o el de una varilla que lanzamos al aire, en ambos casos los cuerpos avanzan rotando como se muestra en la figura 2.1, es decir ocurren a la vez dos movimientos uno de traslación y otro de rotación. Por esta razón es conveniente iniciar el tema hablando del movimiento de una partícula – cuerpo diminuto –, cuerpo que por ser tan pequeño, su rotación prácticamente no se toma en cuenta.

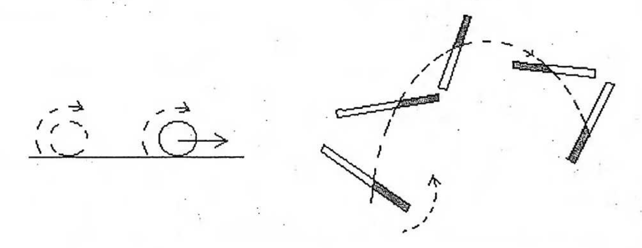


Figura 2.1 Pelotita lanzada sobre el piso y varilla lanzada al aire

En este capítulo se desarrollan las definiciones de cantidades cinemáticas como vector posición, velocidad y aceleración de una partícula y luego hablaremos del movimiento rectilíneo.

2.1 DEFINICIONES PRELIMINARES.

2.1.1 PARTÍCULA

Es todo cuerpo de dimensiones muy pequeñas respecto a las dimensiones de otros cuerpos con los que se le compara, por ejemplo la Tierra es una partícula en nuestra galaxia, pero no lo es si la comparamos con las dimensiones de las personas, en este último caso las personas somos partículas. Como se puede notar, la denominación de partícula es relativa. En general hablaremos de partícula para referirnos a un cuerpo diminuto en su correspondiente escenario, en el que se considera sólo traslación.

2.1.2 SISTEMAS DE REFERENCIA.

Cuando en una conversación escuchamos que un automóvil corría a 100 km/h, se da por entendido que este movimiento es respecto a Tierra, es decir respecto a las cosas que están fijas a Tierra (un poste de alumbrado eléctrico o las casas de una ciudad), a nadie se le ocurre que dicho dato es respecto a otro vehículo en movimiento. Hay una especie de acuerdo tácito.

Sin embargo, con cierta frecuencia escuchamos a un pasajero (A) que va a llegar a su destino, dice: bajo en la esquina que viene y todos entendemos qué es lo quiere decir, aunque otra persona (B) diga que las esquinas no se mueven y lo que se mueve es el automóvil. Estos dos puntos de vista son correctos, para A su sistema de referencia es el vehículo que él considera fijo y que la Tierra se mueve, mientras que para B su sistema de referencia es la Tierra que él considera fija y lo que se mueve es el vehículo.

En este libro, cuando se hable de movimiento, nos referiremos que es respecto a Tierra, a menos que se especifique algo distinto.

2.1.3 TRAYECTORIA DE UNA PARTÍCULA

La trayectoria de una partícula es el camino seguido por ésta durante su movimiento. Puesto que el movimiento es un estado relativo, la forma de la trayectoria también es relativa, como se explica en el siguiente caso.

Consideremos que un helicóptero vuela horizontalmente con la misma velocidad que un automóvil y que ambos siempre están en una misma vertical (respecto a Tierra) como se indica en la figura 2.2 (a), si desde el helicóptero se dejara caer un objeto entonces un pasajero (A), en el automóvil, verá que el objeto sigue la vertical desde el helicóptero hacia él. Sin embargo para una persona (B), que esta observando este fenómeno desde la Tierra, la trayectoria será una línea curva como se ilustra en la figura 2.12 (c).

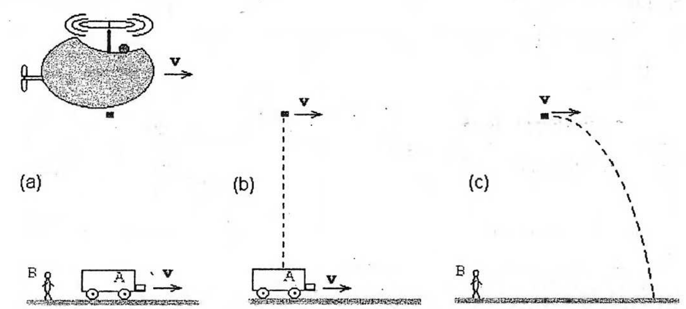


Figura 2.2 Desde un helicóptero que vuela horizontalmente sobre un automóvil, ambos con la misma velocidad, se suelta un objeto. La trayectoria es relativa.

Otro pasajero que está en el helicóptero ve que la trayectoria de dicho cuerpo es también una recta.

Para los pasajeros su sistema de referencia son sus vehículos y para la otra persona su sistema de referencia es la Tierra.

La forma de la trayectoria depende del sistema de referencia.

2.1.4 VECTOR POSICIÓN

Es el vector que indica, en cada instante, la posición de la partícula en estudio respecto a un origen que representa a un punto del sistema de referencia o a un sistema de referencia puntual. Este vector se de nota **r**(t) como se indica en la figura 2.3 (a), donde C es la trayectoria.

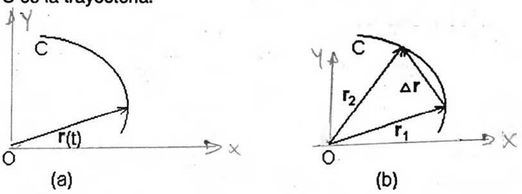


Figura 2.3 (a) Vector posición y (b) vector desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$

2.1.5 VECTOR DESPLAZAMIENTO

Es el vector diferencia entre los vectores posición de una partícula en movimiento entre los instantes t_1 y t_2 (t_2 posterior a t_1). Si los vectores posición en estos instantes

son $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ respectivamente, el vector desplazamiento es $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ como se indica en la figura 2.3 (b)

2.1.6 VELOCIDAD MEDIA

Se define como velocidad media, y se denota $\mathbf{v}_m$, al vector desplazamiento por unidad de tiempo, esto es

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \ : [m/s] \qquad (2.1)$$

donde $\Delta t = t_2 - t_1$. Esta cantidad vectorial tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento debido a que Δt es escalar positivo.

El vector desplazamiento y el vector velocidad media son cantidades diferentes pero con la misma dirección y sentido, como se indica en la figura 2.4.

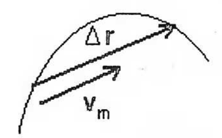


Figura 2.4. Las cantidades vector desplazamiento y la velocidad media son paralelas y del mismo sentido.

Como se aprecia, la velocidad media es referida sólo a dos puntos – inicial y final – de un intervalo de tiempo y es un vector que se dirige de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ como si la trayectoria fuera una línea recta. Es una velocidad constante que en general no corresponde realmente al movimiento pero que da cierta idea de este fenómeno. Como veremos, aún así, esta definición es muy útil para definiciones posteriores.

2.1.7 RAPIDEZ MEDIA

En el sentido común lo que se cuenta es la longitud del camino recorrido – no el desplazamiento - por unidad de tiempo, a esto denominaremos rapidez media.

Puede notar que nos hemos salido del camino, acabamos de definir una cantidad escalar para referirnos a una cantidad asociada a la cinemática. Esta definición trata de interpretar la idea de velocidad en el sentido común.

Por ejemplo, la rapidez media de un móvil que da una vuelta completa en una pista circular de 10m de radio empleando 10 segundos es de $\frac{2\pi R}{\Delta t} = 2\pi$ m/s

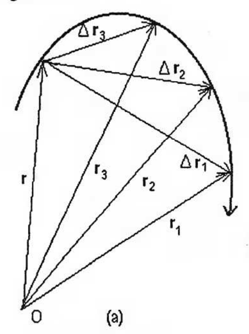
Sin embargo la velocidad media es cero m/s. Recuerde que en una vuelta el vector desplazamiento es cero.

2.1.8 VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Este concepto es delicado pero necesario, diremos que es la velocidad en cada instante, para esto es necesario pensar en una velocidad media en intervalos de tiempo sucesivos y cada vez más pequeños en torno a un instante elegido.

Si el interés es conocer la velocidad en el instante t, lo que se necesita es tomar diferentes intervalos de tiempo cada vez menores, por ejemplo entre t = 8 y t, entre t = 7 y t, entre t = 6 y t, entre t = 5 y t etc hasta llegar a un intervalo de tiempo muy pequeño, se dice: cuando este intervalo tiende a cero. Este procedimiento es necesario porque así se va determinando el comportamiento de la velocidad a medida que Δt se va reduciendo. El valor al cual se acerca la secuencia de velocidades medias, cuando Δt tiende a cero, es el valor límite de las velocidades y viene a ser la velocidad instantánea en el instante t.

Al proceder a calcular la velocidad instantánea se van obteniendo diferentes vectores desplazamiento así como sus correspondientes vectores velocidad media tal como se ilustra en la figura 2.5. El valor límite, al cual tiende esta secuencia de velocidades media es el vector velocidad instantánea que resulta ser tangente a la curva en el punto donde se quiere calcular dicha velocidad como se indica en la figura 2.6.



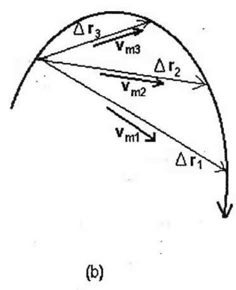


Figura 2.5 (a) Vectores posición y vectores desplazamiento y (b) Vectores desplazamiento y velocidades media

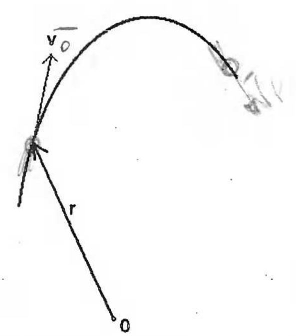


Figura 2.6 Vector posición y vector velocidad instantánea en la trayectoria C

Este procedimiento da como conclusión que la velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo, respecto al instante en el que se calcula dicha velocidad, tiende a cero y se expresa así:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

Cuando se quiere hablar de la velocidad instantánea, por costumbre, sólo se dice velocidad, sin el adjetivo de instantánea. En caso que se quiera hablar de la velocidad media se tendrá que decirlo expresamente.

2.1.9 RAPIDEZ INSTANTÁNEA

Esta cantidad es el módulo de la velocidad instantánea.

2.1.10 ACELERACIÓN MEDIA

Esta aceleración se define como el cambio en la velocidad en cierto intervalo de tiempo, dividido entre dicho intervalo, esto es:

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} : [m/s^2] \qquad (2.3)$$

donde $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. La figura 4.6 ilustra la aceleración media entre los instantes t_1 y t_2.

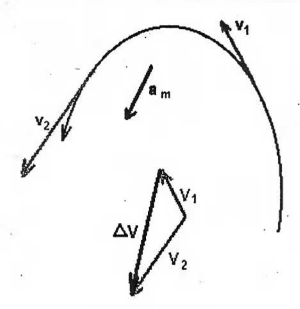


Figura 2.6 Aceleración media en el intervalo t_1 , t_2.

2.1.11 ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

Esta cantidad se define de manera similar a la velocidad instantánea, como sigue:

$$\mathbf{a} = \text{lím}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (2.4)$$

La figura 2.7 muestra la representación de la aceleración instantánea en el punto P_1, o lo que es lo mismo en el instante t. Note que apunta a la zona cóncava.

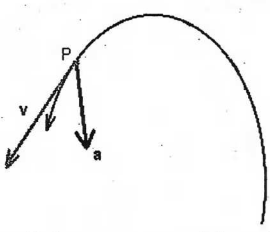


Figura 2.7 Aceleración instantánea cuando la partícula pasa por P

2.2 MOVIMIENTO RECTILÍNEO

El nombre viene de la forma de la trayectoria. Estudiaremos sólo dos casos: a) el movimiento rectilíneo uniforme y b) el movimiento rectilíneo uniformemente variado

2.2.1 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

Este es un movimiento rectilíneo con velocidad constante. Si **v** es constante, deducimos que la $\mathbf{v}_m$ es constante.

La relación que expresa esta definición es:

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) / (t_2 - t_1) \qquad (2.5)$$

Se acostumbra a considerar que todo movimiento rectilíneo se estudia desde el instante t = 0. Denotando con $\mathbf{r}_0$ la posición inicial y con **r** la posición en el instante

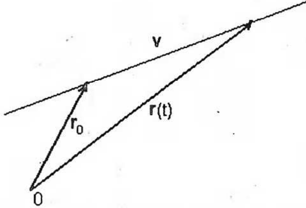


Figura 2.8 Posición inicial $\mathbf{r}_0$ y posición **r** en un instante posterior arbitrario, t.

t como se indica en la figura 4.8, de esta manera la ecuación (4.5) se transforma en:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}\,t \qquad (2.6)$$

Considerando, como es habitual que la línea de movimiento es el eje X, los vectores posición y velocidad se expresan mediante:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} \quad y \quad \mathbf{v} = v\,\mathbf{i}$$

de esta manera, la ecuación (2.5) se puede expresar como sigue,

$$v\,\mathbf{i} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/(t_2 - t_1) = (x_2 - x_1)\mathbf{i} / (t_2 - t_1) = [\,(x_2 - x_1) / (t_2 - t_1)]\,\mathbf{i},$$

mediante transposición de los extremos

$$\{v - [\,(x_2 - x_1) / (t_2 - t_1)]\}\,\mathbf{i} = 0\,\mathbf{i},$$

igualando los coeficientes de **i**

$$v = [(x_2 - x_1) / (t_2 - t_1)] \qquad (2.7)$$

A fin de simplificar esta expresión, consideremos

$$t_1 = 0,\ x_1 = x_o,\ t_2 = t \ \ y \ \ x_2 = x,$$

de esta forma la ecuación que resulta es

$$v = [(x - x_0) / t] \qquad (2.8)$$

Esta es la ecuación que emplearemos en el MRU.

En esta ecuación los valores de las cantidades son referidos al eje X, por tal razón los valores de x son positivos si corresponden a una posición a la derecha del origen del eje, en tanto que toma signo negativo si corresponden a una posición a la izquierda del origen. Respecto a la velocidad, su signo es positivo si el móvil se desplaza en el sentido positivo del eje X y negativo si se desplaza en el sentido negativo.

Teniendo en cuenta que el tiempo es una variable independiente se representa en el eje X (horizontal) y la posición (variable dependiente) sobre el eje Y (vertical), entonces nuestro plano "cartesiano" será el plano t-x. En este plano la ecuación

$$x = v\,t + x_0 \qquad (2.9)$$

que se deduce de la ecuación (2.8), es la ecuación de una recta, donde la pendiente es la velocidad, y la intersección con el eje vertical (x_0) es la posición inicial como se indica en la figura 2.9. Esta es la **representación gráfica de la posición en el MRU.**

Nota: Recuerde que esta ecuación se ha deducido con la consideración que el instante inicial es cero, por tanto la recta que emplearemos empieza en t = 0, o a la derecha del eje vertical.

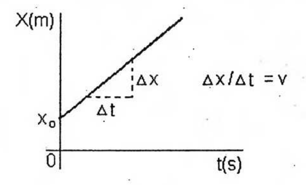


Figura 2.9 Relación lineal entre en tiempo t y la posición x.

Ejemplo 2.1
Una partícula que se mueve con una velocidad de 20 m/s pasó por x = -5 m en t = 0 s. Calcule (a) la posición de la partícula en t = 8 s, (b) el vector posición en el instante t = 7 s y (c) el desplazamiento entre t = 3 s y t = 12 s.

Solución.

(a) Los datos son x_0 = -5m, v = 20 m/s, reemplazando éstos en la ecuación $x = x_0 + v\,t$ se tiene x = -5m + 20 m/s(8s) = 155 m

(b) En el instante t = 7 s, x = -5 m + 20 m/s(7 s) = 135 m, por tanto **r** = (135 m)**i**

(c) $\Delta\mathbf{r}$ = [-5 m + 20 m/s (12 s)]**i** – [-5m + 20 m/s(3 s)]**i** = 180 m/s **i**

Ejemplo 2.2

Dos partículas A y B se mueven con velocidades de 45 m/s i y –12 m/s i respectivamente, pasando ambas en t = 0s por el origen del eje X. (a) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que para que dichas partículas se encuentren separadas 342 m ? (b) ¿qué velocidad debería tener A para que a los 10 s después de pasar por el origen la separación sea de 400 m?

Solución

(a) Las partículas viajan en sentidos contrarios, A en el sentido positivo del eje X, B en sentido negativo y ambas están pasando por el origen en t = 0s. En el instante t, la posición de cada partícula es x_A = 45 t y x_B = -12 t, y la separación $x_A - x_B$ = 45 t –(-12 t), según los datos esta diferencia vale 342 m y así resulta que t = 6 s.

(b) Si v_A es deconocida la separación de las partículas a los 10 s es $x_A - x_B$ = v_A(10 s) – (-12 m/s)(10 s), igualando a los 400 m se deduce que v_A = 28 m/s.

Ejemplo 2.3

¿Qué información se tiene en la siguiente gráfica correspondiente al movimiento de dos partículas A y B?

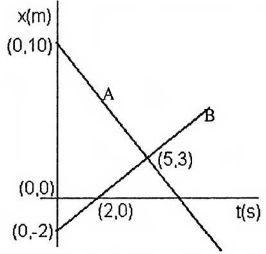


Figura 2.10 Representación de la gráfica t-x para dos partículas A y B.

Solución

Puesto que las gráficas son líneas rectas en el plano t-x, A y B realizan movimiento rectilíneo uniforme. Ver ecuación (2.9)

Partícula A: Posición inicial 10 m dirigiéndose hacia el origen del eje X, con una velocidad de

(3 m – 10 m)/5 s = - 7/5 m/s.

Partícula B: Posición inicial –2 m, dirigiéndose hacia el origen del eje X (en sentido contrario de A) con una velocidad de

$$[3\ m - (-2\ m)]/5\ s = 1\ m/s$$

Ambas partículas se cruzan en el instante $t = 5$ s y a 3 m del origen del eje X.

Representación gráfica de la velocidad en el MRU

Puesto que la velocidad es constante, una gráfica en el plano t-v será una recta paralela al eje t. Si la velocidad es en el sentido positivo se representará en el semi-eje v positivo, en caso contrario en el semi-eje negativo como se ilustra en la figura 2.11

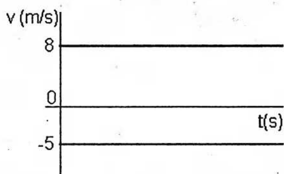


Figura 2.11 Gráfica t-v del MRU ilustrando dos casos.

A partir de esta gráfica se puede interpretar el área de la región limitada entre la velocidad y el eje t como desplazamiento. Ver figura 2.12

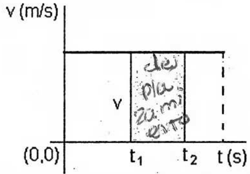


Figura 2.12 El área de la región achurada representa el desplazamiento entre los instantes t_1 y t_2.

Un elemento de área como el de la figura 2.12 tiene como dimensiones el producto de las dimensiones de la velocidad (LT^{-1}) con las dimensiones del tiempo (T), esto es $(LT^{-1})(T) = L$. Por tanto el área tiene dimensiones de desplazamiento.

2.2.2 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO (MRUV)

Este movimiento rectilíneo esta definido por la variación uniforme de su velocidad con el tiempo, mejor dicho es un movimiento rectilíneo con aceleración constante. Si la aceleración instantánea es constante, entonces

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_m = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{t} = \text{vector constante} \qquad (2.10)$$

Eligiendo el eje X como dirección del movimiento, esta ecuación se puede transformar en una relación lineal de la velocidad en función del tiempo como se indica a continuación.

$$v = v_0 + a\,t \qquad (2.11)$$

Teniendo en cuenta que a y v_0 son constantes, ésta es la ecuación de una recta en el plano t – v. En la figura 2.13 se muestra la representación de esta ecuación, en (a) la pendiente es positiva correspondiente a aceleración positiva y en (b) la pendiente es negativa correspondiente a una aceleración negativa.

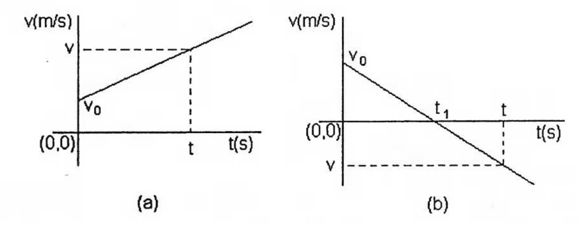


Figura 2.13 Representación gráfica de la relación t – v en el MRUV. (a) aceleración positiva (b) aceleración negativa.

Comentario: Note que en (b) para t mayor que t_1 la velocidad es negativa, esto quiere decir que a partir de este instante la partícula se mueve en sentido negativo del eje X (porque hemos considerado que la partícula se mueve sobre el eje X)

Deducción gráfica del desplazamiento en función del tiempo en el MRUV

Consideremos nuevamente la representación gráfica de la ecuación (2.11) para deducir la ecuación del desplazamiento

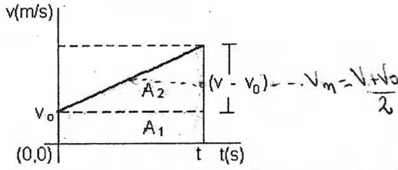


Figura (2.14) Gráfica t – v donde se muestran las áreas A_1 y A_2 entre la velocidad y el eje t

El área entre V(t) y el eje t tiene dimensiones de (L/T)(T) = L
El área A entre v y el eje t es la suma de A_1 y A_2

$$A_1 = t\,(v_0), \quad A_2 = (1/2)\,(t)\,(v - v_0)$$

Teniendo en cuenta, justo la ecuación (2.10), el área A_2 se puede expresar en términos de la aceleración y el tiempo

$$A_2 = (1/2)\,(t)\,(a\,t) = (1/2)\,at^2$$

De esta manera el área A se puede expresar como sigue

$$A = (t)(v_0) + (1/2)\,a\,t^2$$

Como se ha determinado, en la figura 2.11, que el área entre la velocidad y el eje t corresponde al desplazamiento, podemos concluir

$$x - x_0 = v_0\,t + ½\,a\,t^2 \qquad (2.12)$$

De esta ecuación se deduce la correspondiente a la posición x en función del tiempo

$$x = x_0 + v_0\,t + ½\,a\,t^2 \qquad (2.13)$$

Esta ecuación es cuadrática entre el tiempo "t" y la posición "x" y por tanto corresponde a una parábola tal como se ha visto en el capítulo de funciones y gráficas. Esto nos indica que en el MRUV la relación t – x es parabólica, como se ilustra en el comentario al final de esta sección

Combinando las ecuaciones (2.10) y (2.12) se deduce

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,\Delta x \qquad (2.14)$$

También se puede deducir que la velocidad media es la semisuma de las velocidades inicial y final, esto es

$$v_m = \frac{v + v_0}{2} \qquad (2.15)$$

Resumen

En el MRUV las ecuaciones son

$$v = v_0 + a\,t \qquad (2.11)$$

$$x = x_0 + v_0\,t + ½\,a\,t^2 \qquad (2.13)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,\Delta x \qquad (2.14)$$

$$v_m = \frac{v + v_0}{2} \qquad (2.15)$$

NOTA. Con estas cuatro ecuaciones es suficiente para resolver todo ejercicio o problema en el tema del MRUV.

Comentario

Se ha recordado que la ecuación (2.13) corresponde a una parábola, veamos esto con un ejemplo numérico.

Consideremos un caso particular de la ecuación

$$x = x_0 + v_0\,t + ½\,a\,t^2$$

$$x = 5 - 4t + t^2$$

completando cuadrados, resulta

$$x - 1 = (t-2)^2$$

como se reconocerá, esta ecuación corresponde a la parábola con parámetros h = 2, k = 1 y C = 1, la cual se representa en la figura (2.15)

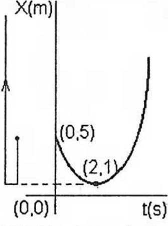


Figura 2.15 Gráfica t – x en el MRUV, a la izquierda se muestra la trayectoria de la particular.

Note que a la izquierda se ilustra el movimiento de la particular sobre el eje X, en t = 0 su posición inicial es x = 5m, en t = 2s la posición es x = 1m y posteriormente se aleja del origen en el sentido positivo del eje X. No olvide que una cosa es la gráfica de la relación t – x y otra es la trayectoria del MRUV.

Gráfica t – a en el MRUV

Como se ha dicho, en este movimiento la aceleración es constante y por tanto la representación en el plano t – a es una recta paralela al eje t como se ilustra a continuación.

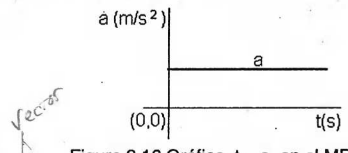


Figura 2.16 Gráfica t – a en el MRUV

Ejemplo 2.4. La figura 2.17 muestra la relación v versus t para una partícula. Calcule (a) el desplazamiento de la partícula hasta los 12s. (b) la longitud del camino recorrido por la partícula en dicho intervalo. (c) ¿Cómo representaría el movimiento de la partícula sobre el eje X.? Haga un esquema de la trayectoria e indique las posiciones para t = 0s, 8 s, para el instante en que v = 0, para los 12 s y 14 s.

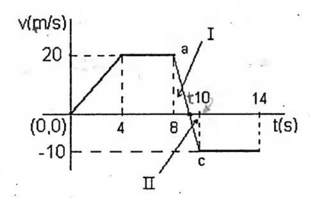


Figura 2.17

x(m)
4
(1,6)
(0,0)
t(s)

Figura 2.18

Solución

El desplazamiento se obtiene calculando el área entre la gráfica de v(t) y el eje t. El área hasta 12 s se puede calcular por partes,

de 0 a 4s:

$$\frac{(4\ \text{s})(20\ \frac{\text{m}}{\text{s}})}{2} = 40\ \text{m}$$

de 4 s a 8 s:

$$(4\ \text{s})(20\ \text{m/s}) = 80\ \text{m}$$

De 8s a 10s: Para calcular esta área debemos considerar los triángulos semejantes I y II Considerando que la base del triángulo I es t´ se tiene que

$\frac{2}{30}=\frac{t'}{20}$ de donde t´ vale 4/3 s. Así el triángulo I tiene como área $\frac{(20\frac{m}{s})(\frac{4}{3}s)}{2}$ =

$\frac{40}{3}$ m y el del área del triángulo II

es $\frac{(2\,s-\frac{4}{3}s)(-10\frac{m}{s})}{2}=\frac{-10}{3}$ m

y de 10 s hasta el segundo número 12 el área vale (-10 m/s)(2 s) = -20 m

El total el desplazamiento es: 40 m + 80 m + (40/3) m - (10/3) m - 20 m

= 110 m

Este resultado se interpreta como que el desplazamiento hasta los 12 s es 110 m en el sentido del semi-eje positivo de las X. Usualmente a la derecha del origen.

(b) Para calcular la longitud del camino recorrido tomamos el módulo de los desplazamientos negativos: 40 m + 80 m + (40/3) m + (10/3) m + 20 m = 156 $\frac{2}{3}$ m

(c)

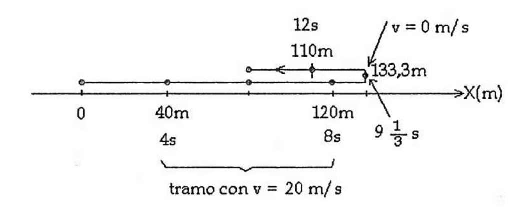


Figura 2.19

Ejemplo 2.5. La figura 2.18 es una parábola en el plano t-X: Calcule (a) la velocidad en los instantes 0 s y 2 s (b) la posición en t=2 s y (c) la velocidad media entre t = 0 y t = 4 s.

SOLUCIÓN.

Un parábola en el plano t-X corresponde a un MRUV sobre el eje X. Recuerde la ecuación para x(t) en este movimiento. Haremos uso de la ecuación de la parábola que se ha visto en el capítulo 2.

A partir de la figura se deduce que $(h,k) = (1,6)$, entonces en la ecuación de la parábola en este plano será:

$$x - k = c(t - h)^2$$

$$x - 6 = c(t - 1)^2$$

para determinar el valor de q consideramos el punto (0,4) que pertenece a la curva

$$4 - 6 = c(0 - 1)^2$$

de donde se obtiene $c = -2$. Así la ecuación es: $x - 6 = -2\,(t - 1)^2$

y desarrollándola: $x = -2t^2 + 4t + 4$. Este resultado es útil porque comparándolo

con la ecuación x(t)

$$x = x_0 + v_0 t + ½\, a\, t^2$$

deducimos que $x_0 = 4$ m, $v_0 = 4$ m/s y $(1/2)\, a = -2$, **esto es** $a = -4$ **m/s²**
Con estos valores ya podemos determinar los resultados
$v = v_0 + at$, reemplazando datos

$$v = 4(\text{ m/s }) + (-4\text{ m/s}^2)\, t$$

Si $t = 0$, $v = 4(\text{ m/s })$,

Si $t = 2$ s, $v = 4(\text{ m/s }) + (-4\text{ m/s}^2)(2\text{ s}) = -4$ m/s, el movimiento es en el sentido negativo del eje X.

(b) La posición para $t = 2$ s se determina mediante

$$x = x_0 + v_0 t + (1/2)\, a\, t^2$$

reemplazando los valores obtenidos de la parábola resulta

$$x = 4\text{ m} + 4(\text{ m/s })(2\text{ s}) + (1/2)(-4\text{ m/s}^2)(2\text{ s})^2 = 4\text{m}$$

Este resultado indica que a los 2s la partícula se encuentra en el mismo punto de partida, pero esta vez se esta dirigiendo al origen. Ver figura 2.20

A los 2s esta pasando por aquí, dirigiéndose al origen.

x(m)
4
(1,6)
(0,0)
t(s)

Figura 2.20 Gráfica x en función de t indicando el desplazamiento en el eje X

(c) Para hallar la velocidad media es necesario calcular x para t = 4 s.
En la ecuación x(t)

$$x = 4\ m + (4\ m/s)(4\ s) + (1/2)(-4\ m/s^2)(4\ s)^2 = -12\ m$$

$$v_m = \frac{x - x_0}{t} = \frac{-12\ m - 4\ m}{4\ s} = -4\ m/s.$$

RESPUESTA. La velocidad media en dicho intervalo es $\mathbf{v}_m = -4\ m/s\ \mathbf{i}$

2.2.3 CAÍDA LIBRE

Este movimiento es un caso particular del movimiento con aceleración constante. Aquí la aceleración es la debida a la atracción terrestre denominada aceleración de la gravedad. Como se ha dicho en un comentario al final del bloque de ecuaciones del MRUV, elegido el sistema de ejes coordenados, el signo de las magnitudes depende de la orientación de éstas respecto a los ejes. Por lo general el eje Y se considera orientado hacia arriba, en consecuencia la aceleración de la gravedad tiene signo negativo.

Un cuerpo puede lanzarse verticalmente hacia arriba o hacia abajo, pero ni en bien empieza el movimiento la aceleración es la de la gravedad, la cual consideramos igual a $-10\ m/s^2$. Ver figura 2.21

Las ecuaciones (2.11), (2.13), (2.14) y (2.15) siguen siendo válidas, lo único que hay que tener en cuenta es que $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ y puesto que la aceleración tiene sentido opuesto al eje Y, como se indica en la figura 2.21, estas ecuaciones pueden expresarse como sigue:

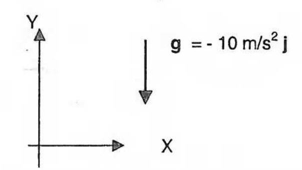


Figura 2.21 Sentido de la aceleración de la gravedad

$$v = v_0 - g\,t \qquad (2.16)$$

$$y = y_0 + v_0 t + ½(-g\,t^2) \qquad (2.17)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2(-g)(y - y_0) \qquad (2.18)$$

$$v_m = \frac{v + v_0}{2} \qquad (2.19)$$

El signo de v_0 depende de si el tiro es hacia arriba (+) o hacia abajo (-). Naturalmente esto en el caso de nuestro eje vertical hacia arriba.
Si se invirtiera el sentido del eje Y, las magnitudes también cambiarán de signo, por ejemplo **g** = +10 m/s^2 **j**.

Ejemplo 2.5. Desde la terraza de un edificio de 80m se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con una velocidad de 40 m/s.¿ Qué tiempo permanece en el aire? ¿Cuál es su velocidad 1s antes de chocar con el suelo?. ¿Con qué velocidad llega al suelo?

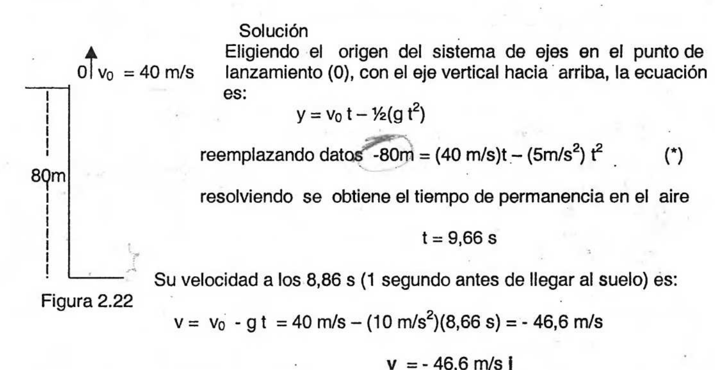


Figura 2.22

Solución
Eligiendo el origen del sistema de ejes en el punto de lanzamiento (0), con el eje vertical hacia arriba, la ecuación es:

$$y = v_0\, t - ½(g\, t^2)$$

reemplazando datos -80m = (40 m/s)t – (5m/s^2) t^2 (*)

resolviendo se obtiene el tiempo de permanencia en el aire

$$t = 9{,}66 \text{ s}$$

Su velocidad a los 8,86 s (1 segundo antes de llegar al suelo) es:

$$v = v_0 - g\, t = 40 \text{ m/s} - (10 \text{ m/s}^2)(8{,}66 \text{ s}) = - 46{,}6 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v} = - 46{,}6 \text{ m/s } \mathbf{j}$$

Al suelo llega con la velocidad de

$$\mathbf{v} = [40 \text{ m/s} - (10 \text{ m/s}^2)(9{,}66 \text{ s})]\, \mathbf{j} = -56{,}6 \text{ m/s } \mathbf{j}$$

Estas dos velocidades tienen sentido vertical hacia abajo por haber resultado con signo negativo.

Cambiando el origen y ubicándolo en el suelo, en 0´, con ele eje Y vertical pero hacia abajo, la fórmula para hallar el tiempo de permanencia en el aire es

$$0 \text{ m} = - 80 \text{ m} - (40 \text{ m/s})\, t + (5 \text{ m/s}^2)\, t^2$$

que es la misma que la ecuación obtenida en la primera parte (*), por tanto la solución es la misma.
Tiempo de permanencia en el aire antes de llegar al suelo = 9,66 s.
Como se aprecia, el resultado es independiente del sistema de ejes (ubicación del origen y orientación de los ejes), como debe ser.

Ejemplo 2.6 Desde el borde superior de un edificio de 10m de altura se lanza hacia arriba una piedra con una velocidad de 5m/s. (a) ¿Hasta qué altura, desde el punto

de lanzamiento, se eleva la piedra? (b) ¿En cuánto tiempo llega al punto más alto?. (c)¿En qué tiempo llega al suelo? (d)¿Con qué velocidad llega al suelo? (e)Exprese la ecuación y(t) para este caso y grafique dicha ecuación.

SOLUCIÓN

(a) Eligiendo el origen del sistema de coordenadas en el punto de lanzamiento como se indica en la figura se tiene

$$v^2 = v_0^2 - 2gh$$

El signo negativo es debido a que la aceleración de la gravedad esta orientada hacia abajo y le corresponde dicho signo en nuestro eje Y.

Reemplazando datos y teniendo en cuenta que en el punto más alto v = 0

$$0 = (5 \text{ m/s})^2 - 2(10 \text{ m/s}^2)\, h_{máx}$$

se obtiene $h_{máx} = 1.25$ m

(b) El tiempo para alcanzar dicha altura se calcula mediante

$v = v_0 - gt$, asignando el valor cero a v

$0(\text{m/s}) = 5 \text{ m/s} - 10(\text{m/s}^2)$, se obtiene $t = 0,5$ s

Figura 2.23

(c) Cuando el proyectil llega al suelo y = - 10 m, recuerde la ubicación del origen del sistema de ejes y la orientación del eje Y.

En la ecuación $y = v_0 t - (1/2)\, g t^2$, reemplazando datos

$$-10 \text{ m} = (5 \text{ m/s})\, t - (5 \text{ m/s}^2)\, t^2$$

resolviendo se obtiene $t_1 = 2$ y $t_2 = -1$

puesto que el tiempo se mide desde cero, la respuesta es t = 2 s

(d) $v = v_0 - g\,t$, si llega al suelo a los 2s, la piedra llegará con

$$v = 5 \text{ m/s} - (10 \text{ m/s}^2)(2 \text{ s})$$
$$v = -15 \text{ m/s}$$

el signo indica que la piedra se esta dirigiendo hacia abajo, $\mathbf{v} = -15 \text{ m/s}\ \mathbf{j}$

(e) Para determinar la ecuación y(t) de este caso particular, reemplazamos los datos en

$y = v_0 t - (1/2)\, g t^2$ resulta $y = 5\,t - 5\,t^2$

completando cuadrados $y - 5/4 = -5\,(t - ½)^2$, esta ecuación que corresponde a

una parábola en el plano t -Y. Vértice: (h, k) = (1/2 , 5/4)

A continuación se muestra la gráfica.

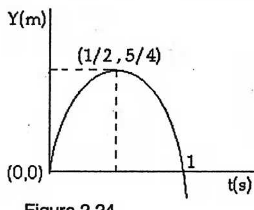


Figura 2.24

PROBLEMAS PROPUESTOS

2.1 La figura 2.25 representa la relación v en función de t para una partícula en movimiento sobre el eje X que pasa por el origen en t = 0s. (i) ¿Cuál es, en m/s^2, su aceleración?. (ii) ¿Qué velocidad, en m/s), tiene dicha partícula para t = 8s?. (iii)¿Cuánto debe transcurrir, en s, para que su rapidez media sea de 8 m/s?

a)1, 13, 6 b) 1, 8, 12 c) 2,13,6 d) 1,12, 6 e)1, 6,12

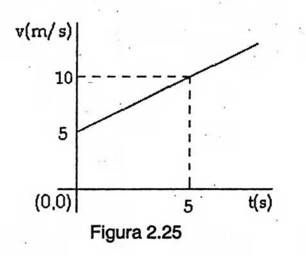


Figura 2.25

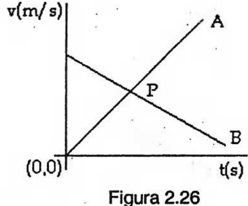


Figura 2.26

2.2 La figura 2.26 corresponde al movimiento de dos partículas A y B que se mueven sobre el eje X. (i) ¿En qué sentido, sobre X, se mueven dichas partículas? (ii) ¿Qué puede decir Ud. del punto P?. (iii) ¿ En qué caso la aceleración actúa en sentido opuesto a la velocidad? (iiii)¿Durante el movimiento se cruzan ambas partículas?

a) A en sentido positivo del eje X y B en sentido negativo, punto de encuentro de ambas partículas, en la partícula B, depende de su posición inicial.
b) A en sentido positivo del eje X y B en sentido negativo, instante en que ambas tiene igual rapidez, en la partícula B, depende de su posición inicial.

c) A y B en sentido positivo del eje X A en sentido positivo del eje X y B en sentido negativo, punto de encuentro de ambas partículas, en la partícula B, depende de su posición inicial.
d) A y B en sentido positivo, punto de encuentro de ambas partículas, en ninguna, depende de su posición inicial.
e) A en sentido positivo del eje X y B en sentido negativo, punto de encuentro de ambas partículas, en la partícula B, no.

2.3 La figura 2.27 muestra la relación x en función de t para el movimiento de tres partículas ¿Qué datos encuentra Ud. en dicha figura?

a) A y B realizan MRUV, C realiza MRU.
b) La velocidad de A es cero en determinado instante, C realiza MRU.
c) Inicialmente, la velocidad de A es positiva y la de B es negativa.
d) inicialmente, la velocidad de A es positiva y la velocidad de c negativa.
e) Los tres son movimientos rectilíneos.

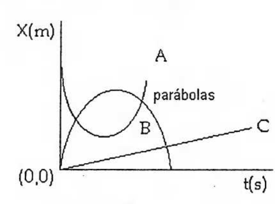


Figura 2.27

2.4 Se deja caer un cuerpo desde una altura h sobre el piso, conociendo que en el último segundo de caída recorre la quinta parte de h. ¿Durante qué tiempo, en segundos, estuvo cayendo dicho cuerpo?

a) 13,9 b) 6,5 c)12,5 d) 10,5 e) 8,5

2.5 La figura 2.28 muestra las gráficas de las relaciones x vs t para dos partículas A y B. (a) ¿Qué tipo de movimiento realiza cada una? (b) ¿Qué rapidez y velocidad tiene cada una en t = 0 s? (c) Haga una gráfica bosquejando el movimiento de cada una sobre su trayectoria.

RESPUESTA. A: MRUV sobre el eje X. B: MRU sobre el eje X

Sugerencia Para calcular x_0, v_0 y a en el movimiento de A halle la ecuación de la parábola como en los ejemplos de MRUV y luego determínelos por comparación con la ecuación (2.13) para x(t). La partícula en t = 0s se encuentra pasando por el origen en el sentido positivo del eje X, a los 6s se detiene y retorna etc.

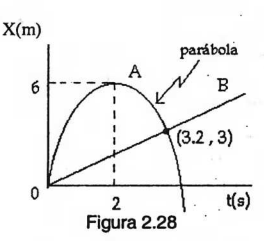
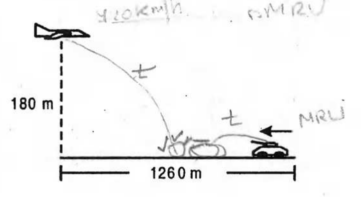


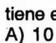
Figura 2.28

2.6 Al lanzar un proyectil verticalmente hacia arriba con cierta velocidad, alcanza una altura máxima $h_{máx}$. Si la aceleración de la gravedad se redujera a la mitad de su valor, o a la cuarta parte, ¿cuales serán las nuevas alturas máximas si el proyectil se lanza siempre con la misma velocidad inicial?. Haga una gráfica de $h_{máx}$ versus "g", considerando que es posible variar "g" a voluntad.

RESPUESTA. La altura máxima en el primer caso se duplica y en el segundo se multiplica por cuatro. Haga Ud. la gráfica.

2.7 Cuando un semáforo se pone en verde, un coche que esperaba el cruce arranca con aceleración constante de 2 m/s^2. En ese instante, a 100 m detrás del coche, avanza un camión con velocidad constante de 20 m/s. ¿A qué distancia, en metros, del punto inicial del camión, éste alcanza al coche por primera vez?
A) 750 B) 116 C) 725 D) 200 E) 350



2.8 Un avión de combate vuela horizontalmente a 180 m de altura con velocidad constante 720 km/h. En sentido contrario, por tierra un tanque viaja a velocidad constante. Si en el instante mostrado en la figura, el avión suelta una bomba la que hace impacto en el tanque justo un instante antes que toque tierra, determine la velocidad (en km/h) que tiene el tanque (g = 10 m/s^2)

A) 10 B) 25 C) 36 D) 50 E) 72

2.9 Desde la azotea de un gran edificio se deja caer una piedra "A". Al transcurrir 1 segundo y desde la misma altura alcanzada por "A", en dicho instante se lanza verticalmente hacia abajo otro cuerpo "B" con una velocidad inicial de 25 m/s. Si B impacta en el piso 1 segundo antes que A. ¿Cuál es la altura del edificio en metros?
A) 110 B) 115 C) 120 D) 125 E) 24,2

2.10 En el instante t=0 segundos un móvil parte desde el origen de un sistema X–Y, con una velocidad $\overline{v}_0=(6\hat{i}+8\hat{j})$ m/s. Si entre t = 0 s y t = 2 s el móvil desarrolla una velocidad media de $(8\hat{i}+9\hat{j})$ m/s . ¿Cuál es la aceleración constante (en m/s^2) que actúa sobre el móvil?

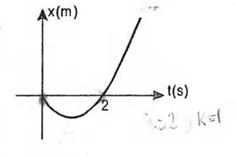
A) $\hat{i}+\hat{j}$ B) $\hat{i}+2\hat{j}$ C) $\hat{i}-2\hat{j}$ D) $2\hat{i}+\hat{j}$ E) $2\hat{i}-\hat{j}$

2.11 Señale la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones.

a) La velocidad instantánea es paralela al desplazamiento cuando Δt es muy pequeña.
b) La velocidad instantánea es paralela al límite del desplazamiento cuando Δt tiende a cero.
c) La aceleración es perpendicular a la velocidad.
d) La aceleración es paralela al desplazamiento.
e) En general la aceleración es paralela a la velocidad

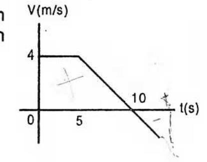
2.12 La relación t–x de un móvil que se mueve con MRUV se ilustra en la figura. Calcule la velocidad (en m/s) en el instante t = 5 s.

A) 25 B) 30 C) 36
D) 24 E) 18



2.13 La figura representa la relación v vs t de un cuerpo en movimiento rectilineo. ¿Al cabo de que tiempo en segundos, el cuerpo regresa al origen (punto de partida)?

A) 18,7 B) 20 C) 14,5
D) 22,4 E) 16,3



2.14 La figura muestra un cañón desde el que se lanza un proyectil para que impacte en P. Calcule el módulo de la velocidad de lanzamiento.

A) 22,4 B) 15 C) 32,3
D) 18,6 E) 35,2

2.15 José lanza una piedra desde el techo de su casa con una velocidad $\vec{v}=24\frac{m}{s}\hat{i}-18\frac{m}{s}\hat{j}$ y choca con el piso con una velocidad cuyo módulo es de 40 m/s. Calcule en metros, la distancia desde el punto de impacto hasta la fachada de la casa.

A) 32,5 B) 33,6 C) $5\sqrt{5}$ D) 26,34 E) $24\sqrt{5}$

Capítulo 

Movimiento en dos Dimensiones

PARABOLICO

INTRODUCCIÓN

Hemos visto que el movimiento de una partícula es rectilíneo si:

- la velocidad es constante (MRU)
- la aceleración es constante y colineal con la velocidad (MRUV)
- la aceleración es variable y colineal con la velocidad

Este último caso no se ha estudiado ya que no corresponde al curso de física a nivel preuniversitario.
Concluimos que si la aceleración tiene la misma dirección que la velocidad, la trayectoria es rectilínea.
Por tanto si la aceleración no tiene la misma dirección de la velocidad, ésta cambiará de dirección describiendo una trayectoria que deja de ser unidimensional. Bajo ciertas condiciones, que veremos en este capítulo, el movimiento ocurre en un plano, es decir el movimiento será en dos dimensiones y en general será un movimiento curvilíneo.

3.1 MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL - ECUACIONES GENERALES

Consideremos un movimiento bidimensional en el que la aceleración permanece constante, es decir su magnitud y dirección no varían durante el movimiento.

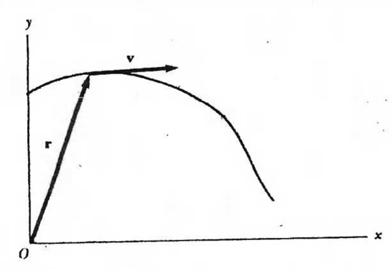


Figura 3.1 Trayectoria en dos dimensiones del movimiento de una partícula.

Como vimos en el capítulo anterior el movimiento de una partícula se describe con su vector posición $\mathbf{r}$, velocidad $\mathbf{v}$ y aceleración $\mathbf{a}$. El vector posición de una partícula moviéndose en el plano X-Y es

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} \qquad (3.1)$$

Si se conoce el vector posición la velocidad de la partícula se puede obtener según la ecuación 2.2 como

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} \qquad (3.2)$$

En (3.1) y (3.2) x, y, v_x , y v_y , componentes de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$, varían con el tiempo cuando se mueve la partícula.
Dado que el movimiento es con aceleración constante

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} \qquad (3.3)$$

entonces a_x y a_y, componentes de la aceleración son constantes en el tiempo.

Si la partícula inicia su movimiento con velocidad inicial $\mathbf{v_0}$, esta es

$$\mathbf{v_0} = v_{x0}\,\mathbf{i} + v_{y0}\,\mathbf{j}$$

Aplicando las ecuaciones cinemáticas a las componentes de la velocidad $\mathbf{v}$ para cualquier instante t :

$$v_x = v_{x0} + a_x t \qquad\qquad v_y = v_{y0} + a_y t$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (3.2)

$$\mathbf{v} = (v_{x0} + a_x t)\,\mathbf{i} + (v_{y0} + a_y t)\,\mathbf{j} \qquad (3.4)$$

Por tanto

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_0} + \mathbf{a}\,t \qquad (3.5)$$

Lo que significa que la velocidad de una partícula en un instante t es igual a la suma del vector velocidad inicial $\mathbf{v_0}$ y la velocidad adicional, **at**, que adquiere en el tiempo t como resultado de su aceleración constante.

De la misma forma, de acuerdo a la ecuación 2.Y sabemos que las posiciones o coordenadas x, y de una partícula que se mueve con aceleración constante son

$$x = x_0 + v_{x0}\,t + \tfrac{1}{2}\,a_x t^2 \qquad\qquad y = y_0 + v_{y0}\,t + \tfrac{1}{2}\,a_y t^2$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (3.1)

$$\mathbf{r} = (x_0 + v_{x0}\,t + \tfrac{1}{2}\,a_x t^2)\,\mathbf{i} + (y_0 + v_{y0}\,t + \tfrac{1}{2}\,a_y t^2)\,\mathbf{j} \qquad (3.6)$$

$$\mathbf{r} = (x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j}) + (v_{x0}\,\mathbf{i} + v_{y0}\,\mathbf{j})\,t + \tfrac{1}{2}\,(a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j})\,t^2 \qquad (3.7)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}\,t + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{a}\,t^2 \qquad (3.8)$$

Esta ecuación nos dice que el vector posición **r** en cualquier instante t es la suma del vector posición inicial, el vector desplazamiento $\mathbf{v_0}$ t, que se obtiene de la velocidad inicial de la partícula, y el desplazamiento ½ **a** t^2 resultado de la aceleración constante de la partícula.

3.1.1 Condición para el movimiento en un plano: aceleración constante

El movimiento de una pelota pateada por un futbolista, el de una piedra que gira atada a una cuerda o el movimiento de la luna alrededor de la tierra, son ejemplos de movimiento en el plano.
Se demuestra que la condición para que el movimiento de una partícula se realice en un plano es que su aceleración **a** sea constante. El movimiento se realiza en el plano formado por los vectores velocidad **v** y aceleración **a**.
En la figura 3.2 se aprecia que el módulo de la velocidad cambiará si la aceleración tiene componente tangencial.

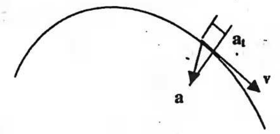


Figura 3.2 Velocidad **v** y aceleración **a** con direcciones distintas (no colineales) para la trayectoria curva de una partícula, $\mathbf{a_t}$ es la aceleración tangencial

Cuando en el movimiento de una partícula la aceleración es perpendicular (normal) a su desplazamiento, el camino que sigue la partícula, es decir su trayectoria, forma una circunferencia, como veremos en una sección posterior.
En el caso de un movimiento en el cual la aceleración es constante y no colineal con **v**, la trayectoria seguida por la partícula es una parábola. Si en el instante cero la velocidad inicial del movimiento, $\mathbf{v_0}$, y la aceleración **a** son los vectores mostrados en la figura 5.2, la figura muestra el plano del movimiento parabólico.

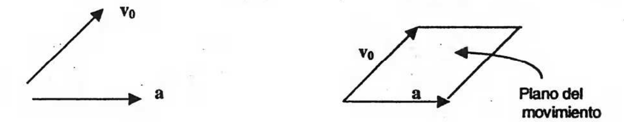


Figura 3.3 La velocidad inicial v_0 y la aceleración **a** determinan el plano del movimiento de la partícula

La trayectoria parabólica tiene su eje de simetría paralelo a la aceleración como se ve en la figura 3.4. La partícula, lanzada desde P con una velocidad inicial $\mathbf{v_0}$, sigue una trayectoria parabólica. En la figura, la parábola se ha completado con una línea

de trazos para mostrar que el eje de simetría de esta curva es paralelo a la aceleración.

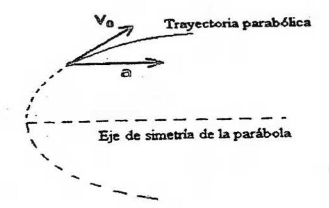


Figura 3.4

Se observa en la figura 3.4 que la aceleración **a** cambia de dirección a la velocidad **v**, por lo que la trayectoria se va curvando formando la parábola. El caso más familiar es el movimiento de un proyectil que estudiaremos en la siguiente sección.

3.2 MOVIMIENTO DE PROYECTILES

En este movimiento la aceleración es la que produce la tierra sobre todos los cuerpos, la aceleración de la gravedad **g**, en dirección vertical y con sentido hacia el centro de la tierra. La representamos vectorialmente como **g** = 9,81 (-**j**) m/s^2. Para simplificar los cálculos aproximamos su valor a 10 m/s^2.

Al lanzar el proyectil desde la superficie terrestre, o cerca de ésta, con una velocidad inicial que hace un ángulo θ con la horizontal, sigue una trayectoria parabólica en el plano determinado por su velocidad inicial $\mathbf{v_0}$ y la gravedad **g** como se aprecia en la figura 3.5

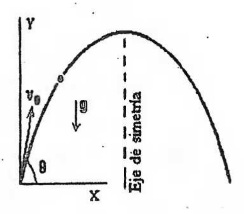


Figura 3.5

El vector posición **r** en cada punto de la trayectoria parabólica, se representa en el gráfico de la figura 3.6. Observe que si no existiera la aceleración **g**, el recorrido del móvil sería rectilíneo en la dirección de v_0t. El vector (1/2)$\mathbf{g}t^2$ es el desplazamiento vertical debido a la aceleración **g** dirigido hacia abajo.

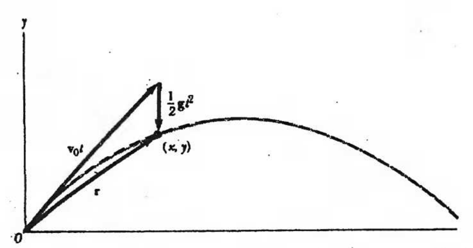


Figura 3.6 Vector desplazamiento **r** de un proyectil cuya velocidad inicial en el origen es $\mathbf{v_0}$

Se ve claramente de la figura 3.6 que la expresión vectorial para **r** es:

$$\mathbf{r} = \mathbf{v_0}t + ½\mathbf{g}t^2 \qquad (3.9)$$

Podemos concluir entonces que el movimiento de proyectiles es la superposición de dos movimientos: a) movimiento a velocidad constante en la dirección inicial y b) el movimiento de una partícula que cae libremente en la dirección vertical con aceleración constante.

Para deducir las ecuaciones que describen el movimiento, establecemos un sistema de coordenadas (figura 3.7). La aceleración **g** actúa verticalmente, por tanto, sólo afecta a la componente v_y, mientras que v_x permanecerá constante e igual a v_{0x} como se aprecia en esta figura.

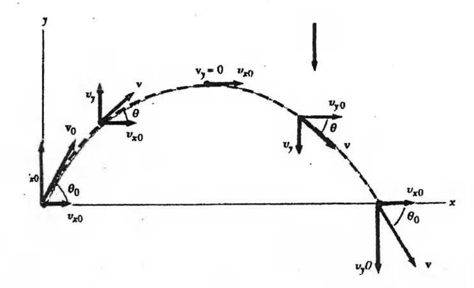


Figura 3.7 Componentes v_x y v_y del vector velocidad para varios puntos de la trayectoria. La aceleración solo afecta la componente v_y, v_{x0} se mantiene constante.

En la figura 3.7 puede verse que el movimiento a lo largo del eje X es con rapidez, v_{x0} constante; mientras que el movimiento a lo largo del eje Y es con aceleración g, constante. La composición de los dos movimientos da como resultado la trayectoria parabólica.

Aplicaremos las ecuaciones cinemáticas para el movimiento en cada eje:

a) en el eje X el movimiento es uniforme como el MRU
b) en el eje Y el movimiento tiene aceleración constante, emplearemos la ecuación del MRUV

Deduciremos entonces:

- x, el desplazamiento horizontal y v_x, la componente de la velocidad en el eje X
- y, el desplazamiento vertical y v_y, la componente de la velocidad en el eje Y

3.2.1 Ecuaciones para el movimiento parabólico

En cada punto de la trayectoria del proyectil el vector posición **r**, la velocidad **v** y la aceleración **g** del proyectil se expresan en función de sus componentes como:

$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ (3.10) $\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j}$ (3.11) y

$$\mathbf{g} = -g\,\mathbf{j} \quad (3.12)$$

En el caso general el origen del sistema de coordenadas no corresponde a la posición inicial, es decir $\mathbf{r_0} = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j}$.

En el eje X, el movimiento es descrito por las ecuaciones del MRU

$$x = x_0 + v_{x0}\,t \quad (3.13) \qquad v_x = v_{x0} \quad (3.14)$$

En el eje Y, la aceleración es constante en el sentido negativo del eje Y, por tanto el movimiento es descrito por las ecuaciones del MRUV.

$$v_y = v_{y0} - gt \quad (3.15) \qquad y = y_0 + v_{y0}\,t - (½)gt^2 \quad (3.16)$$

$$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(\Delta y) \quad (3.17) \qquad v_{ym} = \frac{v_y + v_{y0}}{2} \quad (3.18)$$

Estas ecuaciones también se expresan en términos del ángulo que la velocidad inicial forma con el eje X, quedando como sigue

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta_0)t \quad (3.13)' \qquad v_x = v_0 \cos\theta_0 \quad (3.14)'$$

$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 t - g t$ (3. 15)´ $y = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\theta_0 t - (½)g t^2$ (3.16)´

$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(\Delta y)$ (3.17)´ $v_{ym} = \dfrac{(v_{0y}\operatorname{sen}\theta_0 t - gt) + (v_{0y}\operatorname{sen}\theta_0)}{2}$ (3.18)´

Por tanto el vector posición **r** del proyectil en cualquier instante t es:

$$\mathbf{r} = (x_0 + (v_{0x}t)\,\mathbf{i} + (y_0 + v_{0y}t - (½)gt^2)\,\mathbf{j} \qquad (3.19)$$

la velocidad **v** del proyectil en un instante t es:

$$\mathbf{v} = (v_{0x})\,\mathbf{i} + (v_{0y}t - gt)\,\mathbf{j} \qquad (3.20)$$

Ejemplo 3.1
Si desde la tierra se lanza un proyectil con una velocidad inicial de 50 m/s formando un ángulo de 37º respecto a la horizontal. a) ¿A qué altura en metros se encuentra el proyectil cuando su velocidad sea de $40\hat{i} - 20\hat{j}$. b) Calcule además la altura máxima.

Solución

a) $y = V_{oy}t - gt^2/2$

$y = (V_o \operatorname{Cos}37º)\, t - gt^2/2$ ....(*)

Falta conocer t.

Pero la ecuación $\vec{V} = 40\hat{i} - 20\hat{j}$

Se tiene:

$Vy = V_{oy} - gt$

$-20 = V_o\operatorname{Cos}37º - 10t$

$-20 = 50\,(5/4) - 10t$

de donde:

$t = 5s.$

Reemplazando en (*)

$y = h = 50(4/5)(5) - g/2(5)^2 = 25m$

b) $h_{max} = \dfrac{V_{oy}^2}{2g} = \dfrac{30^2}{20} = 45m$

3.2.2 Ecuación de la trayectoria

Hemos afirmado que la trayectoria de los proyectiles es parabólica, en seguida realizaremos esta demostración.

Para hacer sencilla la operación, consideremos que la posición inicial es el origen del sistema de ejes coordenados, es decir $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Despejando el tiempo de la ecuación (3.13)´ y reemplazando en la ecuación (3.16)´ resulta

$$y = (v_{y0}/\, v_{x0})\, x - \frac{g}{2\, v_{x0}^2}\, x^2 \qquad (3.21)$$

Notar que $\tan \theta_0 = v_{y0}/\, v_{x0}$ (figura 3.6)

En (3.19) los coeficientes de x y de x^2 son constantes, por tanto la ecuación es de la forma $y = ax - bx^2$ que corresponde a una parábola. En el siguiente ejemplo se muestra una aplicación sencilla.

Ejemplo 3.2 Un proyectil es lanzado con v_0= 3,6 m/s y θ_0 = 78, 7°, determine la ecuación de la trayectoria.

Con estos datos de la ecuación anterior resulta

$$y = (\tan 78,7°)x - \frac{10}{2\,(3,6)^2 \cos^2 (78,7°)}\, x^2 = 5x - 5x^2$$

completando cuadrados se obtiene

$$y - 5/4 = -5(x - ½)^2$$

que es la ecuación de una parábola con vértice en (h, k) = (1/2, 5/4) y c = -5. La siguiente figura representa esta parábola que viene a ser la trayectoria de una partícula lanzada con una rapidez de 3,6 m/s y un ángulo de elevación de 78,7°.

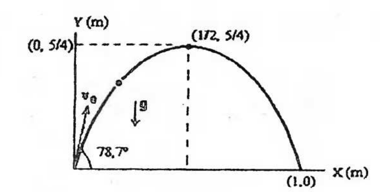


Figura 3.7

Ejemplo 3.3.

Se lanza una partícula desde el origen de un sistema de coordenadas con una velocidad de $v = (2\hat{i} + \hat{j})\,m/s$. Si la aceleración es $a = +10\frac{m}{s^2}\hat{j}$ determine la ecuación de la trayectoria.

Solución

$$\vec{r} = \vec{r} \cdot t + \frac{\vec{a}}{2} t^2; \quad \text{De donde: } x = V_{ox}\, t$$

$$y = V_{oy}\, t + 10\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Despejando t de la primera ecuación $t = \frac{x}{V_{ox}}$ y reemplazando en la segunda.

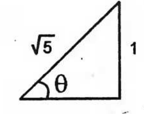
$$y = (\text{Tan}\theta_o)x + \frac{5}{V_{ox}^{\ 2}} x^2$$

$$y = \text{Tan}\theta_o x + \frac{5}{V_o^2 \text{Cos}^2\theta_o} x^2$$

$$y = \frac{1}{2} x + \frac{5}{5\text{Cos}^2\theta_o} x^2$$

$$y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} x^2$$

$$y = \frac{1}{2} x + \frac{5}{4} x^2 \qquad \text{Ec. de la trayectoria.}$$



3.2.3 Altura Máxima (H_{max})

Un proyectil lanzado con un ángulo de elevación, va ganando altura hasta llegar al punto más alto de su trayectoria que corresponde a la altura máxima . Observar que la aceleración de la gravedad g actúa solo sobre la componente vertical de la velocidad inicial, v_{y0}, mientras que v_{x0} permanece constante. Deduciremos la expresión para la altura máxima si se conoce v_0 y θ_0, el punto de lanzamiento se considera el origen del sistema de coordenadas ($x_0 = 0$ $y_0 = 0$).

En el punto más alto la componente vertical de la velocidad $v_y = 0$, entonces según la ecuación (3.15) o (3.15).

$$0 = v_{y0}\, t - gt \qquad \text{esto indica que para} \qquad t_s = \frac{(v_{y0})}{g}$$

donde t_s es el tiempo de subida del proyectil.

Se alcanza la altura máxima, reemplazando t_s y $y_0 = 0$ en la ecuación (3.16) o (3.16)'.

$$H_{max} = y = v_{y0}\, t - (½)gt^2 = \frac{v_{oy}(v_{y0})}{g} - \frac{(½)\, g\, (v_{y0}^2)}{g^2}$$

simplificando

$$H_{max} = \frac{v_{y0}^2}{2\,g} = \frac{v_0^2\, sen^2\, \theta_0}{2\,g} \qquad (3.22)$$

Si fuera posible variar el ángulo de lanzamiento, manteniendo constante la rapidez, deducimos que para $\theta_0 = 90^\circ$ el proyectil llega a lo más alto que puede alcanzar. En la figura 3.8 se ilustra que el proyectil alcanza diferentes alturas máximas para diferentes ángulos de lanzamiento, con v_0 fijo.

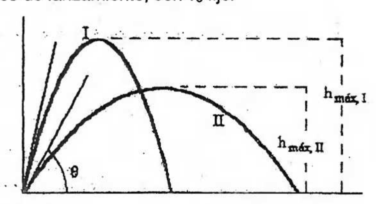


Figura 3.8 Altura máxima para dos ángulos distintos de lanzamiento, H_{max} crece a medida que el ángulo crece hasta 90°.

3.2.4 Alcance (R)

Cuando el proyectil vuelve a su altura inicial ($y = y_0$), se habrá desplazado horizontalmente una distancia que se denomina alcance denotado por R (también se le conoce como rango). Para determinar R recordemos que el movimiento es MRU a lo largo del eje X.

$$R = v_{x0}\, t_v \qquad (3.23)$$

Donde t_v es el tiempo que le toma al proyectil volver a la altura inicial, o tiempo de vuelo ($t_v = 2\, t_s$). Si el proyectil se lanza desde el origen del sistema de coordenadas, $y_0 = 0$. En la ecuación (3.16)´

$$y = v_{y0}\, t - (½)gt^2$$

hacemos $y = 0$, obteniendo $t_v = (2\, v_{y0})/g$, reemplazando t_v en (3.21) resulta

$$R = \frac{2\, v_{x0}\, v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2\, sen\, 2\theta_0}{g} \qquad (3.24)$$

Se puede notar de esta expresión que para $\theta_0 = 45^\circ$ el proyectil cubre el máximo alcance.

La expresión vectorial del alcance es:

$$\mathbf{R} = \frac{2\, v_{x0}\, v_{0y}}{g}\, \mathbf{i}$$

De igual manera el vector posición cuando el proyectil alcanza la altura máxima es:

$$\mathbf{r} = (\, R/2\,)\, \mathbf{i} + H_{max}\, \mathbf{j}$$

puede notar que cuando $y = H_{max}$ el proyectil ha recorrido la mitad del alcance, R/2.

3.3 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En un carrusel, en la montaña rusa o en la silla voladora de un parque de diversiones; o en un auto que entra a una curva, los móviles realizan movimientos circulares o curvilíneos efectuados en un plano.

Cuando una partícula realiza un recorrido circular de radio r, barre un arco s y un ángulo θ, figura 3.9. La velocidad **v** de la partícula es tangente en cada instante a la trayectoria, por lo que se la conoce como velocidad tangencial o lineal. Observe que v cambia de dirección como se ve en los puntos P y Q de la figura 3.10.

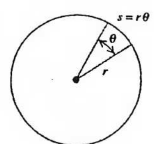
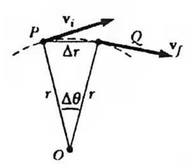


Figura 3.9 Trayectoria circular de una partícula, s y θ son al arco y ángulo recorridos.

Si la partícula recorre arcos iguales en tiempos iguales, la rapidez es constante, el movimiento es circular uniforme (MCU). La rapidez media, v_m, se define:

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

t_1 y t_2 son los instantes en que la partícula esta en los puntos P (arco s_1), y Q (arco s_2) respectivamente, figura 3.10



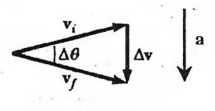


Figura 3.10 Velocidad **v** en dos puntos de la trayectoria circular

Figura 3.11 v_i y v_f

Cuando el intervalo Δt se hace muy pequeño, esto es $\Delta t \to 0$, tenemos el valor de la rapidez instantánea:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Como puede observarse en la figura 3.10 la velocidad cambia de dirección, por tanto la partícula experimenta una aceleración **a**, recordar que **a** = **Δv**/ Δt . En la figura 3.11 tenemos los vectores velocidad de los puntos P y Q, la aceleración **a** es paralela a **Δv**, que se demuestra, tiene dirección radial, por tanto la aceleración tiene dirección radial, es decir apunta siempre al centro del círculo por lo que se denomina aceleración centrípeta (que busca el centro) o normal.

Para obtener el valor de la aceleración centrípeta, observemos que el triángulo de la figuras 3.11 es isósceles (recuerde que la rapidez es constante) y semejante al triángulo OPQ de figura 3.10, lo que nos lleva a la relación

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}$$

Reemplazando Δv en la expresión que define la aceleración media se obtiene

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v\,\Delta r}{r\,\Delta t} \qquad (3.25)$$

observe que para Δt pequeños, Δr ≈ Δs, por lo que en el límite, cuando Δt→0, la rapidez es v = Δr/Δt, finalmente la aceleración centrípeta tiene la magnitud

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} \qquad (3.26)$$

La figura muestra las direcciones de la velocidad y aceleración en distintos puntos del movimiento circular uniforme de una partícula.

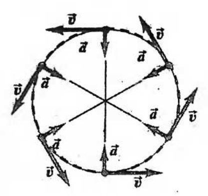


Figura 3.12. Velocidad y aceleración instantáneas en MCU

En el movimiento circular uniforme, el tiempo que le toma a la partícula dar una revolución completa se conoce como el período T. La frecuencia f representa el número de vueltas que realiza el móvil por unidad de tiempo, en particular para una vuelta el tiempo empleado es T, por lo que

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (3.27)$$

La unidad de frecuencia es 1/s o s^{-1} conocido como Hertz (Hz)

En un tiempo T la partícula realiza un recorrido igual $2\pi r$, por tanto su rapidez es

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad (3.28)$$

Y la aceleración centrípeta se expresa en función del radio de la trayectoria r y el período T como

$$a = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \qquad (3.29)$$

MOVIMIENTO CIRCULAR ACELERADO

Consideremos ahora un móvil en una trayectoria circular en la que su velocidad cambia tanto en dirección como en magnitud, como se puede ver en la figura 3.13 La velocidad siempre es tangente a la trayectoria, observar que además de aceleración radial o centrípeta, $\mathbf{a_r}$, hay aceleración tangencial, $\mathbf{a_t}$, por lo que la aceleración total **a** hace un ángulo respecto a la trayectoria.

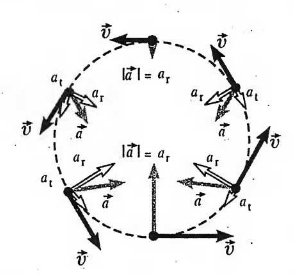


Figura 3.13. Movimiento de una rueda de Chicago, en la parte superior la velocidad es mínima, el móvil acelera hasta llegar al punto más bajo, en el que la velocidad es máxima. Luego el móvil desacelera (frena) hasta regresar al punto más alto. Observar en este tramo que la aceleración tangencial, $\mathbf{a_t}$, no es constante siendo su sentido opuesto a la velocidad . La aceleración radial, $\mathbf{a_r}$, es también variable.

La aceleración radial (normal o centrípeta) se debe al cambio en la dirección de la velocidad **v** y tiene valor

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

donde r es el radio de la trayectoria. **Notar que el valor de la aceleración radial no es constante, como en el caso de movimiento circular uniforme, pues la velocidad v va cambiando de magnitud.**

La aceleración tangencial, $\mathbf{a_t}$, es originada por el cambio en la rapidez de la partícula

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (3.30)$$

Cuando la $\mathbf{a_t}$ es de magnitud constante se trata del **movimiento circular uniformemente acelerado** (MCUA). En el curso nos limitaremos a este tipo de movimiento.
En el ejemplo mostrado, figuras 3.14, se observa claramente que el vector aceleración total $\mathbf{a}$ es el resultado de sumar la componente radial $\mathbf{a_r}$ y la componente tangencial $\mathbf{a_t}$, es decir $\mathbf{a}$ puede expresarse como:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a_r} + \mathbf{a_t} \quad (3.31)$$

Esto es en cada punto se tendrá

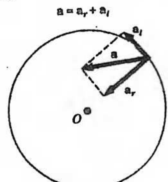


Figura 3.14 Componentes de aceleración en un MCUA

Puesto que $\mathbf{a_r}$ y $\mathbf{a_t}$ son vectores perpendiculares entre sí , se deduce que el módulo del vector aceleración total es

$$a = \sqrt{a_r + a_t} \quad (3.32)$$

Velocidad angular y aceleración angular

Una partícula en movimiento circular de radio r, genera un arco s y un ángulo θ siendo $s = r\,\theta$. Otra manera de describir el movimiento circular es analizando las variables angulares: el desplazamiento angular Δθ, la velocidad angular y la aceleración angular. En la figura 3.15 se muestra el ángulo barrido $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

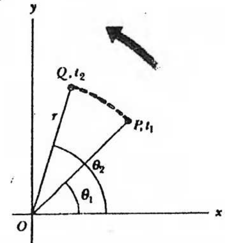


Figura 3.15 Ángulos θ_1 y θ_2 e instantes t_1 y t^2

Se define la velocidad angular promedio, ω_m, como el desplazamiento angular por unidad de tiempo

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (3.33)$$

Análogamente a la velocidad instantánea, se define la velocidad angular instantánea como

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (3.34)$$

La velocidad angular tiene unidades rad/s o s^{-1}. Tomando como referencia el eje de rotación X, consideraremos ω positiva cuando el ángulo θ aumenta (giro en sentido antihorario) y negativo cuando θ disminuye (giro en sentido horario).

En movimiento circular uniforme la velocidad angular tiene valor constante, al realizar una vuelta completa 2π es el ángulo barrido en un tiempo igual al período T, por tanto

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{o} \qquad \omega = 2\pi\upsilon \qquad (3.35)$$

En rigor la velocidad angular **ω** es un vector perpendicular al plano del movimiento, representado en el eje del movimiento circular. Por convención el sentido de **ω** se determina por la regla de la mano derecha, los cuatro dedos siguen el sentido de giro de la partícula y el dedo pulgar indica el sentido de **ω**. **(Ver figura 3.16)**

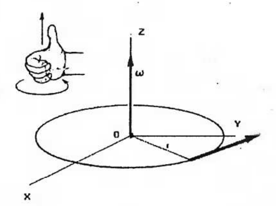


Figura 3.16 Ilustración de la regla de la mano derecha

Todo movimiento circular uniforme, en la práctica, se inicia desde el reposo es decir con velocidad angular cero y luego de unos segundos llega a un valor constante, como es el caso de un ventilador o de las ruedas de una bicicleta o las llantas de un carro.

Si la velocidad angular instantánea de un móvil cambia de ω_1 a ω_2 en el intervalo de tiempo Δt, el móvil tiene una aceleración angular. Se define la aceleración angular media α_m como el cambio de velocidad angular por unidad de tiempo.

$$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (3.36)$$

Cuando el intervalo Δt se hace muy pequeño, es decir en el limite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, se tiene el valor de la aceleración angular instantánea α

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (3.37)$$

α tiene unidades rad s^{-2} o s^{-2}.

Movimiento circular con aceleración angular constante (MCUA)

El movimiento circular con aceleración angular constante se describe con expresiones similares a las del movimiento con aceleración constante en una dimensión.

La velocidad angular ω se relaciona con el desplazamiento angular, θ a partir de la definición (5.23)

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, t \qquad (3.38)$$

donde ω_0 es la velocidad angular inicial en el tiempo $t_0 = 0$. Cuando ω es variable en el tiempo, la velocidad angular media ω_m es la semisuma de las velocidades inicial y final en un intervalo Δt:

$$\omega_m = \frac{\omega + \omega_0}{2} \qquad (3.39)$$

Igualmente en la relación (3.33) reemplazamos ω de (3.38), obtenemos la expresión del desplazamiento angular θ

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (3.40)$$

Eliminando t en las dos últimas ecuaciones, se llega a

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\,\alpha\,(\theta - \theta_0) \qquad (3.41)$$

Después de observar las tres últimas ecuaciones es claro que las variables del movimiento con aceleración angular constante se pueden relacionar

$\theta \rightarrow x$ $\qquad \omega \rightarrow v$ $\qquad$ y $\qquad \alpha \rightarrow a$

donde x, v y a son las cantidades cinemáticas del movimiento en una dimensión con aceleración constante.

Relaciones entre las cantidades angulares y lineales

El movimiento circular se describe sea con las llamadas cantidades lineales como desplazamiento s, velocidad v, aceleraciones radial y tangencial. O con las cantidades angulares definidas en los párrafos anteriores. Veremos enseguida las relaciones entre sí.

Recordemos que el arco s descrito por un móvil es : $s = r\,\theta$, la velocidad tangencial o lineal v se define

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} r = r\,\omega \qquad (3.42)$$

En ésta última expresión se observa que en el movimiento circular la velocidad tangencial depende directamente de la distancia del móvil respecto del eje de giro, dado por r. A mayor distancia r, mayor velocidad lineal.

En el movimiento circular uniformemente acelerado la aceleración tangencial esta dada por

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta(r\omega)}{\Delta t} = r\frac{\Delta \omega}{\Delta t} = r\alpha \qquad (3.43)$$

Por ultimo la aceleración radial o normal sabemos esta definida por:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = \omega^2 r$$

Ejemplo 3.4
Una partícula se mueve en una trayectoria circular de 4m de radio y el módulo de su velocidad es v = 1 + 3t, donde t se expresa en segundos y "v" en m/s. Determine en qué instante la magnitud de la aceleración tangencial es 3/5 de la aceleración total.

Solución

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_t^2}, \quad a_t = \frac{3}{5}a, \quad a_t = 3$$

$$\frac{5}{3}a_t = \sqrt{a_t^2 + a_t^2} \quad \text{elevando al cuadrado}$$

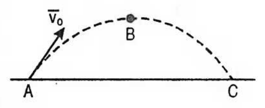
$$\frac{25}{9}a_t^2 = a_t^2 + a_c^2 \quad , \quad \frac{16}{9}a_t^2 = [\frac{(1+3t)^2}{r}]^2$$

Reemplazando $a_t = 3$ y despejando

T = 1,0 s

PROBLEMAS PROPUESTOS

01.- Acerca del movimiento de proyectiles, indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F).



(I) La velocidad del proyectil en el punto de partida y en el de impacto es la misma.

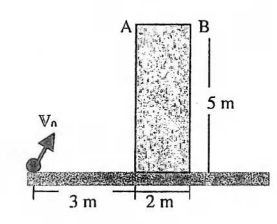
(II) El tiempo de salida t_{AB} es igual al tiempo de bajada t_{BC}

(III) $\overline{v}_B = \overline{v}_{cx}$ ($\overline{v}_{cx}$ es la componente de la velocidad en C a lo largo del eje X)

a) VVV b) VFV c) FVF d) FVV e) VVF

02.- En una tarde de invierno, cuando el viento sopla a lo largo del eje X, un futbolista lanza un balón con una rapidez de 25 m/s formando un ángulo de 37º con la horizontal, observándose que cuando el disparo se hace a favor del viento el balón recorre 72 m más que cuando lo hace en contra del viento. Determine la aceleración constante (en m/s^2) que proporciona el viento.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10



03. -Un proyectil es lanzado desde el punto O y pasa por los puntos A y B. Determine (en m/s) las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la partícula.

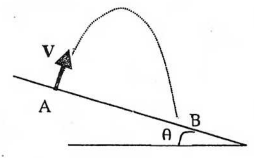
a) $\sqrt{15}$; $\sqrt{15}$ b) $\sqrt{15}$; $(3/8)\sqrt{15}$

c) $(8/3)\sqrt{15}$; $\sqrt{15}$ d) $\sqrt{15}$; $(8/3)\sqrt{15}$

e) $(3/8)\sqrt{15}$; $\sqrt{15}$

04.-Desde lo alto de un edificio se lanza horizontalmente una piedra con una rapidez v_o y luego de 3 s la rapidez es el doble de la inicial. Determine v_o, en m/s.

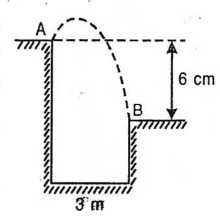
a) $10\sqrt{3}$ b) $15\sqrt{3}$ c) 18 d) $18\sqrt{3}$ e) 21



05. - Desde el punto A es lanzada una pelota, perpendicularmente a la rampa, con una rapidez v_o, tal como se muestra en la figura. Determine la longitud AB.

Rpta.- $AB = 2\dfrac{V_0^2 \, tg\theta}{g\cos\theta}$

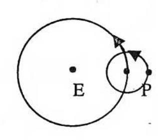
06. - ¿Con que velocidad (en m/s) hay que lanzar una piedra del punto A para que en 3 s llegue al punto B? Sugerencia; Ubique los ejes XY en A y resuelva vectorialmente.



a) $\hat{i} + \hat{j}$ b) $3\hat{i} + \hat{j}$ c) $3\hat{i} - 13\hat{j}$

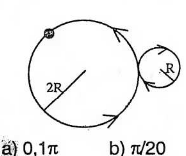
d) $\hat{i} + 13\hat{j}$ e) $2\hat{i} - 10\hat{j}$

07. - El planeta P recorre su órbita alrededor de la estrella E con MCU de periodo T y el satélite S lo hace alrededor del planeta P en un periodo T/18. Si en el instante t=0 s los tres cuerpos están alineados como se muestra. ¿Cuál será la medida (en radianes) del ángulo EPS en el instante T/4?



a) 0 b) $\pi/4$ c) $\pi/2$ d) $3\pi/4$ e) $3\pi/2$

08. -La figura muestra una partícula que se mueve con rapidez constante a lo largo de una pista formada por dos anillos de radios 2R y R. Halle la mínima rapidez angular (en rad/s) de la partícula si el mínimo tiempo empleado en recorrer toda la pista es de 30 s.

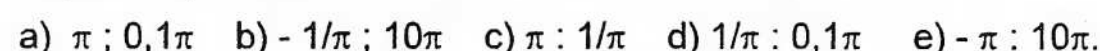


a) $0,1\pi$ b) $\pi/20$ c) $\pi/30$ d) $\pi/15$ e) $\pi/25$

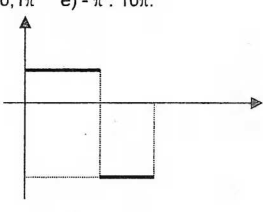
09.-Una partícula se encuentra girando con velocidad angular constante sobre una circunferencia de 2 m de radio. Halle la aceleración (en m/s^2) de la partícula en el instante en que su velocidad es **v** = $\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j}$ m/s.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

10. -La centrifuga de secado de una máquina lavadora esta dando vueltas a razón de 900 rpm y desacelera uniformemente hasta 300 rpm luego de efectuar 50 revoluciones. Encuéntrese: a) La aceleración angular (en rad/s). b) El tiempo (en s) requerido para efectuar estas 50 revoluciones.



a) π ; 0,1π b) - 1/π ; 10π c) π : 1/π d) 1/π : 0,1π e) - π : 10π.



11. -Una partícula describe una trayectoria circular con aceleración angular que varía con el tiempo según se muestra en la figura. Si en t=0 s parte del reposo desde la posición $\theta = \pi$ rad, hallar el numero de vueltas descrita por la partícula en los 5 primeros segundos de su movimiento.

a) 0,5   b) 2,0   c) 4,5   d) 5,5   e) 7,5

12. -Una partícula se mueve circularmente en una pista de 4 m de radio con una rapidez angular ω (en rad/s) que varía con el tiempo t (en s) según ω = 25 -7t. Calcule el desplazamiento angular θ (en rad) efectuado por la partícula durante los primeros 4 segundos.

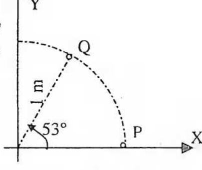
a) 40   b) 41   c) 42   d) 43   e) 44

13. -Una partícula 0,3 kg de masa, realiza un movimiento circular de 2 m de radio con una aceleración angular de 1,2 rad/s^2. Si en cierto instante el módulo de la aceleración normal es el doble del módulo de la aceleración tangencial, calcule aproximadamente, en m/s^2, el módulo de la aceleración actuante sobre la partícula en dicho instante.

a) 2,40   b) 4,80   c) 5,37   d) 6,45   e) 7,83

14. -Un móvil desarrolla un MCUV. Parte del reposo en P y luego de 2 s pasa por Q. Obtener los vectores aceleración centrípeta y tangencial en Q.

Rpta. $a_t = -\frac{53\pi}{1800}(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$



15. -Una partícula realiza un movimiento circular partiendo del reposo y con aceleración angular α =2 rad/s^2. Si luego de 1 s su aceleración es a = $\sqrt{5}$ m/s^2, halle su aceleración normal, en m/s^2, transcurridos 2 s de iniciado el movimiento. ¿Cuánto vale la longitud recorrida (en m) en dicho intervalo de tiempo?.

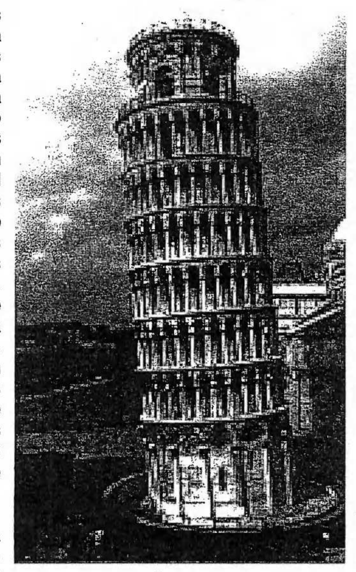
a) 2   b) 4   c) 6   d) 8   e) 10

Capítulo 4

Estática

INTRODUCCIÓN

Con frecuencia percibimos cuerpos que describen ciertos movimientos en la naturaleza, tal es el caso de los vehículos al pasar por una avenida, una persona caminando por la acera, el vuelo de una pequeña ave, etc. Pero además de ello observamos a nuestro alrededor objetos que están estacionarios y permanecen estacionarios con el transcurrir del tiempo, como por ejemplo: la pizarra, los fluorescentes, los postes de alumbrado en las avenidas, una torre, etc. Entonces para estos últimos casos, estos cuerpos se encuentran en equilibrio estático. Teniéndose múltiples aplicaciones de interés de suma importancia en la práctica para la ingeniería. Por ejemplo, las fuerzas ejercidas por los cables de un puente colgante deben ser conocidas previamente a fin de que los cables se construyan lo suficientemente resistentes como para soportar el puente. De igual modo, las grúas deben diseñarse de modo que no vuelque al levantar un auto.



En este capítulo estudiaremos la primera y tercera ley de Newton analizando qué condiciones aseguran el equilibrio y el estado de reposo en el que se encuentran los cuerpos.

La estática es aquella rama de la mecánica que estudia la condición de equilibrio de los cuerpos, el cual lo explicaremos a través de la Primera Ley de Newton.

Hace tres siglos, Newton (1642-1727) formuló las leyes del movimiento en su obra "Principios Matemáticos de la Filosofía Natural (1686)".

4.1 FUERZA

Es aquella cantidad vectorial que describe la interacción entre dos cuerpos en el Universo. También se puede conceptuar como que es toda acción que tiende a alterar, ya sea el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo.

4.2 FUERZAS FUNDAMENTALES O BASICAS EN LA NATURALEZA

Las fuerzas que se perciben pueden explicarse en función a 3 interacciones básicas que ocurren entre partículas elementales.

- Gravitatorias
- Electrodébiles
- Nucleares fuertes

4.2.1 Fuerza Gravitatoria(F_G) .-

Si una piedra es soltada de cierta altura, ésta cae. Lo mismo sucede también con cualquier otro cuerpo, si éste no está sostenido por algo.

Si se impide la caída de un cuerpo, colocando un soporte debajo de él, el cuerpo presiona sobre el soporte con cierta fuerza. Esto puede comprobarse fácilmente poniéndose un cuerpo sobre la mano.

¿Cuál es la causa de todos estos fenómenos? La causa es la atracción de los cuerpos por la tierra a través de una fuerza llamada fuerza de gravedad o gravitacional. La tierra atrae no sólo a los cuerpos situados directamente en su superficie, sino también a los cuerpos situados lejos de ella, por ejemplo los satélites artificiales de la tierra, la luna, y otros cuerpos celestes.

F_G = Peso = W = mg

m = masa

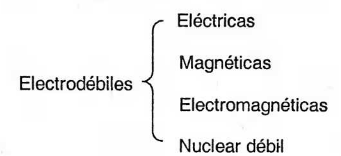
g = aceleración de la gravedad

Fig. 4-1

En el caso particular de la fuerza que la Tierra ejerce sobre todo cuerpo en su vecindad, esta fuerza gravitatoria toma el nombre de peso.

4.2.2 Fuerza Electrodebil .-

Incluye las fuerzas eléctricas, magnéticas, electromagnéticas y la nuclear débil. La fuerza electromagnética entre partículas elementales cargadas es tan grande en relación con la fuerza gravitatoria que esta ultima puede despreciarse. La repulsión entre dos protones es del orden de 10^{36} veces la fuerza de atracción gravitatoria. Algunos ejemplos de fuerzas electrodebiles son la fuerza de empuje, la fuerza de fricción, etc.



Nota. Las fuerzas nucleares débiles son de corto alcance, tiene lugar entre protones, electrones y neutrones, explica la existencia de la radiación β.

4.2.3 Fuerza Nuclear Fuerte .-

Tiene lugar entre partículas fundamentales llamadas hadrones (protones y neutrones) constituyentes de los núcleos atómicos. Es la fuerza responsable de mantener unido el núcleo (N). Esta fuerza está en el orden de 10^2 . veces la fuerza electrodebil.

La fuerza nuclear fuerte es de muy corto alcance (dentro del radio nuclear, en el orden de 10^{-15} m).

Las interacciones nucleares fuertes evitan que los protones se separen por acción de fuerzas eléctricas.

Los dos protones del átomo de Helio están atraídos por la fuerza nuclear fuerte venciendo la repulsión electrostática de los protones.

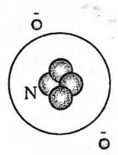


Fig. 4-2

4.2.4. Algunas fuerzas como aplicaciones de las básicas conocidas :

A) **Fuerza de Tensión (T).-** Cuando dos jóvenes juegan a tirar de los extremos de una cuerda, se observan que éstas se tensan fácilmente debido a la acción externa sobre la cuerda, pero esto no logra que la cuerda se estire, ¿Por qué?

Para despejar esta duda, analicemos lo que ocurre al interior de la cuerda:

La acción externa sobre la cuerda, internamente provocará, en cierto grado, una tendencia al aumento de la distancia entre los átomos, por lo que entre ellos comenzaran a obrar las fuerzas de atracción electromagnéticas entre moléculas para impedir la separación que traería como consecuencia la ruptura de la cuerda.

A la resultante de estas pequeñas fuerzas internas que surgen entre las moléculas se le denomina **fuerza de tensión.**

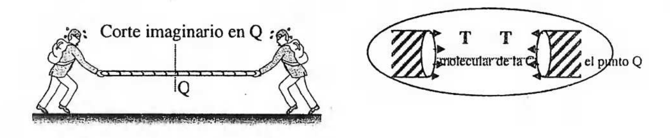


Fig. 4-3

B) Fuerza de Compresión (C) .- También es una fuerza de carácter electromagnético, la acción externa sobre la barra sólida, provocará internamente, en cierto grado, una tendencia a la disminución de la distancia entre los átomos, por lo que entre ellos comenzarán a obrar las fuerzas de repulsión electromagnética entre moléculas para impedir el acercamiento entre ellas. A la resultante de estas pequeñas moléculas se le denomina **fuerza de compresión.**

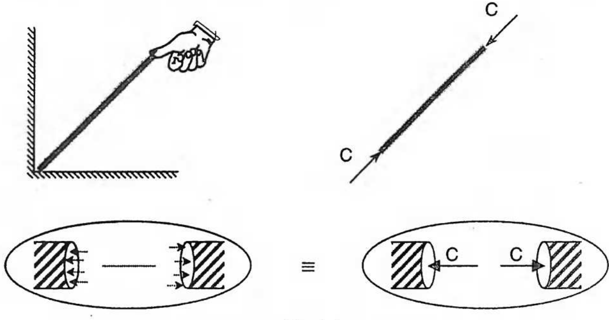


Fig. 4-4

C) Fuerza Elástica(F) .- Cuando estiramos o comprimimos un resorte tal como se indica en la figura, experimentamos sobre nuestras manos la acción de una fuerza, la cual es llamada fuerza elástica. Esta fuerza elástica es de origen electromagnético, ya que si la distancia entre los átomos aumenta entre ellos comienza a manifestarse la fuerza de atracción y si la distancia disminuye, obra la fuerza de repulsión.

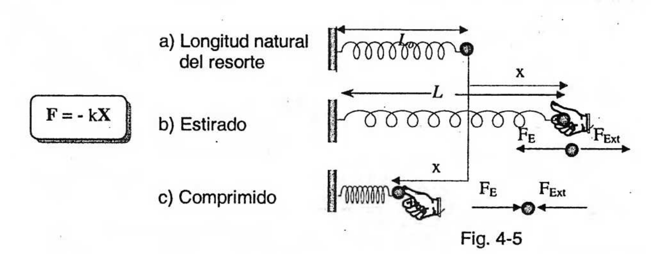


Fig. 4-5

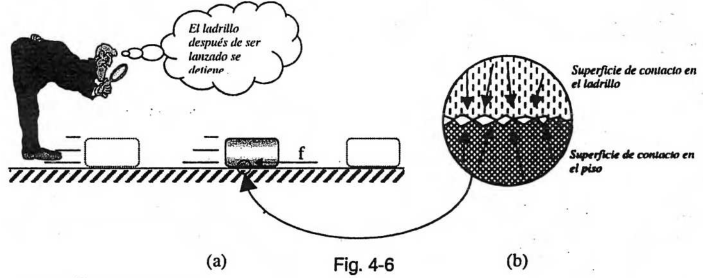
Siendo $|X|$; la medida de la deformación en longitud que experimenta el resorte o la posición a partir de un origen de coordenadas establecido.
k : Constante de rigidez del resorte; L_0 = longitud sin deformar del resorte; L = longitud deformada del resorte, $|X| = |L - L_0|$

Esta fuerza elástica interna, siempre se manifiesta en oposición al efecto externo deformador.

D. FUERZAS DE ROZAMIENTO POR DESLIZAMIENTO (f):

Una de las causas de la aparición de la fuerza de rozamiento consiste en las rugosidades de los cuerpos en contacto. Incluso las superficies de los cuerpos que parecen ser lisas tienen irregularidades, salientes y arañazos.

En la figura 4.5 , dichas irregularidades están representadas de forma amplificada. Cuando un cuerpo se desliza o intenta deslizarse por la superficie de otro, los átomos de las superficies interactúan entre sí (carácter electromagnético), lo que crea cierta fuerza (f) que frena el deslizamiento o intento de deslizamiento de esta superficie sobre la otra.



(a) Fig. 4-6 (b)

a. Esquema general.
b. Se muestra el detalle de la superficie en contacto.

4.3 PARTICULA Y CUERPO RIGIDO

4.3.1 IDEA DE PARTICULA.- Recordando de la cinemática, una partícula es un cuerpo al cual se le asume sus dimensiones muy pequeñas (despreciables) por lo tanto solo posee movimiento de traslación y no de rotación, ni vibración(las fuerzas son concurrentes sobre este cuerpo).

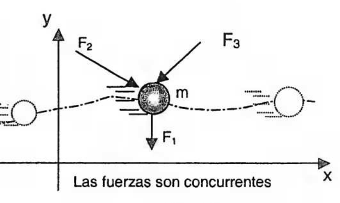


Fig.4-7

4.3.2 IDEA DE CUERPO RIGIDO.- Es un sistema de partículas que forman un cuerpo donde sus dimensiones no se puede despreciar y mantienen su forma y tamaño. Estos cuerpos además de movimiento de traslación pueden tener movimiento de rotación no de vibración. (Cuerpos Duros)



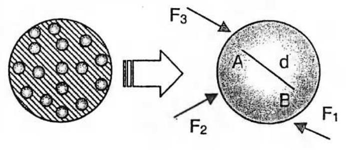


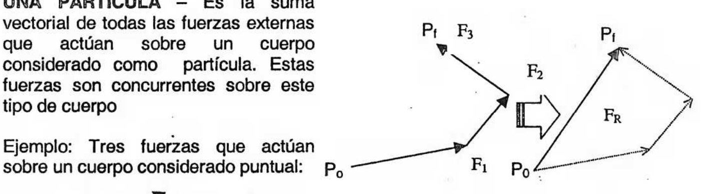
Fig. 4-8

4.3.3 FUERZA RESULTANTE SOBRE UNA PARTICULA – Es la suma vectorial de todas las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo considerado como partícula. Estas fuerzas son concurrentes sobre este tipo de cuerpo

Método Gráfico :

Ejemplo: Tres fuerzas que actúan sobre un cuerpo considerado puntual:

$\mathbf{F_1 + F_2 + F_3 = F_R}$



P_o : Punto inicial
P_f : Punto final

Fig. 4-9

Considerando un sistema de coordenadas cartesianas :

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F_x} + \Sigma \mathbf{F_y}$$

4.4 PRIMERA LEY DE NEWTON

Todo cuerpo mantendrá su estado de reposo o de M.R.U. , si es que no hay una fuerza externa resultante que actúe sobre él y logre sacarlo de dicho estado.

La primera ley de Newton recoge El Principio de Inercia de Galileo: "El estado natural de los cuerpos es encontrarse en reposo o en movimiento rectilíneo con velocidad constante (M.R.U.)"

Observe que el enunciado de la primera ley de Newton se refiere al reposo o M.R.U sin mencionar respecto a qué sistema de referencia.

Los sistemas de referencia a los que se refiere Newton en la primera ley son los denominados sistemas de referencia inercial.

4.4.1 SISTEMA DE REFERENCIA:

4.4.1.1 Inercial: Es aquél que no tiene movimiento de rotación ni de traslación acelerada, respecto de una partícula libre de interacción.
(Tiene aceleración a = 0)

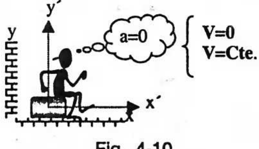


Fig. 4-10

4.4.1.2 No Inercial : Es aquel que tiene movimiento de rotación traslación acelerada.

Nota.- A pesar de que en rigor, la Tierra no es una partícula libre, para fines prácticos se le considera como un sistema de referencia inercial.

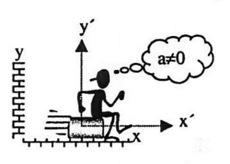


Fig. 4-11

4.5 TERCERA LEY DE NEWTON

La tercera ley del movimiento planteada por Newton establece, que como consecuencia de una interacción entre dos cuerpos surgen dos fuerzas comúnmente denominadas acción y reacción, las cuales son de igual valor, colineales de orientaciones contrarias y que además actúan sobre cuerpos diferentes.

Consideremos como ejemplo la interacción entre un martillo y un clavo:

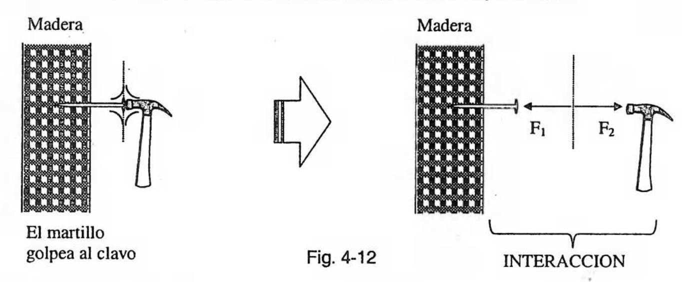


Fig. 4-12

Cumpliéndose : $\mathbf{F_1} = -\mathbf{F_2}$; $F = |\mathbf{F_1}| = |\mathbf{F_2}|$
Indistamente $\mathbf{F_1}$ ó $\mathbf{F_2}$ pueden ser denomimados acción y reacción.

No olvidar que la tercera ley de Newton se aplica para cuerpos en contacto o cuerpos que están a distancia

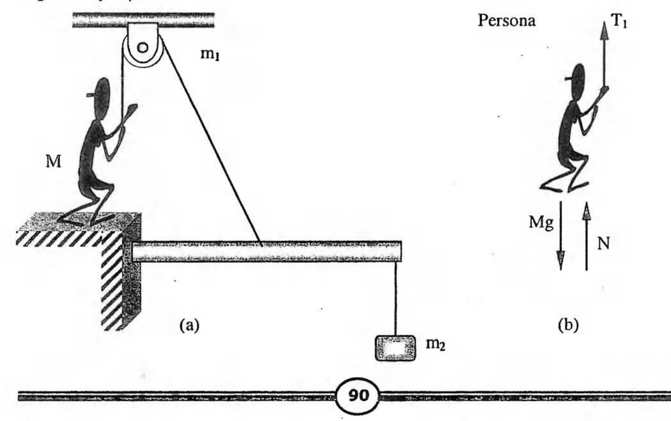
$$\vec{F_1} = -\vec{F_2}$$



Fig. 4-13

4.6 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (D.C.L.)

Para realizar un D.C.L. sobre un cuerpo o sistema de cuerpos interconectados, se aísla el cuerpo en estudio y se gráfica las fuerzas que actúan sobre él. Se dan algunos ejemplos:



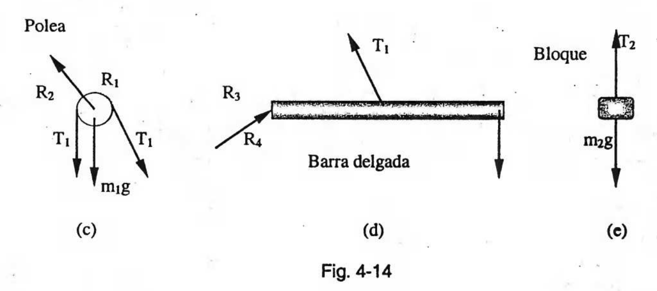


Fig. 4-14

4.7 EQUILIBRIO

Se dice que un cuerpo esta en equilibrio cuando está en reposo o se mueve con velocidad constante respecto a un sistema inercial como por ejemplo la Tierra.

4.7.1 Equilibrio de una partícula .- Si una partícula se encuentra en reposo o se traslada con M.R.U. entonces se encuentra en equilibrio de traslación y se cumple :

$$F_R = 0$$

La partícula de masa m se encuentra en equilibrio.

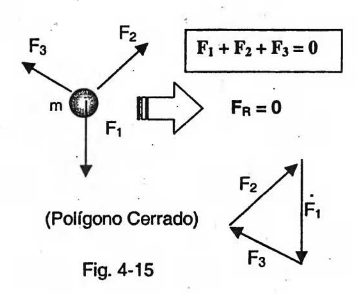


Fig. 4-15

Considerando un sistema de coordenadas cartesianas: $\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F_X} + \Sigma \mathbf{F_Y} = 0$

Lo que implica: $\Sigma F_X = 0 \quad \wedge \quad \Sigma F_Y = 0$

4.8 FUERZAS DE ROZAMIENTO ESTATICO Y CINETICO

¿Qué es la fuerza de rozamiento estático?
Esta fuerza surge cuando la superficie rugosa de un cuerpo intenta deslizarse sobre la superficie rugosa de otro cuerpo. La fuerza de rozamiento estático es tangente a la superficie de contacto y se manifiesta en dirección contraria al posible deslizamiento de la superficie de dicho cuerpo respecto a otra.

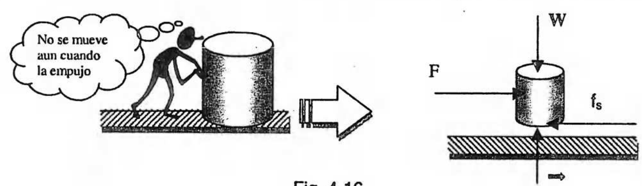


Fig. 4-16

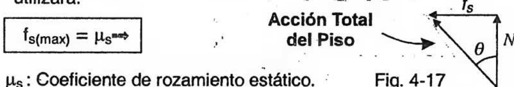
Donde :

f_s : Fuerza de rozamiento estático.

⇒ : Fuerza como componente normal de la acción del piso sobre el cuerpo.

NOTA :La fuerza de rozamiento tomará su máximo valor, cuando la superficie de dicho cuerpo este a punto de deslizar respecto del otro, para tal efecto se utilizará:

$$f_{s(max)} = \mu_s ⇒$$



μ_s : Coeficiente de rozamiento estático.

Fig. 4-17

La fuerza de fricción está fuertemente ligada a la aspereza de las superficies que entran en contacto.

a. Por lo general en superficies pulidas: $\mu_s < 1$
b. En superficies lisas se considera que no hay fricción

¿Qué es la fuerza de rozamiento cinético?

Es aquella fuerza que surge cuando la superficie rugosa de un cuerpo desliza sobre otra (con velocidad constante o se mueve con aceleración) que también es rugosa. Esta fuerza también es tangente a las superficies en contacto, y se opone al deslizamiento de una respecto de la otra.

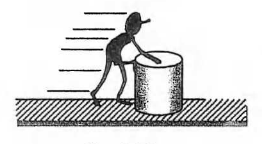


Fig. 4-18

$$f_k = \mu_k ⇒$$

μ_k : Coeficiente de rozamiento cinético

f_k : Fuerza de rozamiento cinético

GRAFICA DE LA FUERZA DE ROZAMIENTO

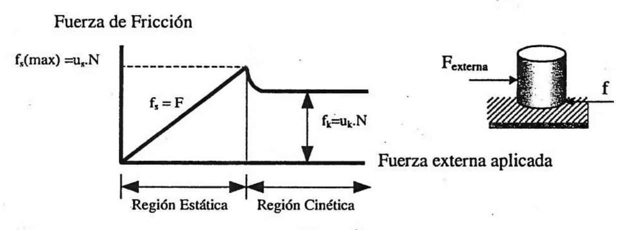


Fig. 4-19

Representación gráfica de la variación de la fuerza de fricción en función de la fuerza externa aplicada al cuerpo.
Por lo general se cumple : $0 < \mu_k < \mu_s < 1$ (En algunos casos especiales $\mu_s > 1$)

La fuerza de rozamiento estática es variable y según el bloque de la Fig. 4-19 es del mismo módulo que la fuerza externa aplicada al bloque.

4.9 TORQUE O MOMENTO DE UNA FUERZA (τ)

Siempre que abres una puerta o una válvula, o que ajustes una tuerca con una llave, se producirá un giro. El torque de la fuerza produce un giro. El Torque no es lo mismo que la fuerza. Si quieres que un objeto se desplace le aplicas una fuerza, la fuerza tiende a acelerar a los objetos. Si quieres que un cuerpo rígido rote le aplicas un torque. Los torques producen rotación.
Se define torque de una fuerza **F** respecto de un punto O como el producto vectorial :

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{r}$: Vector posición respecto de O.
$\vec{F}$: Fuerza aplicada

$$|\tau_0| = d \cdot F$$

θ es el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$ siendo:
$d = r.\text{Sen}\theta$

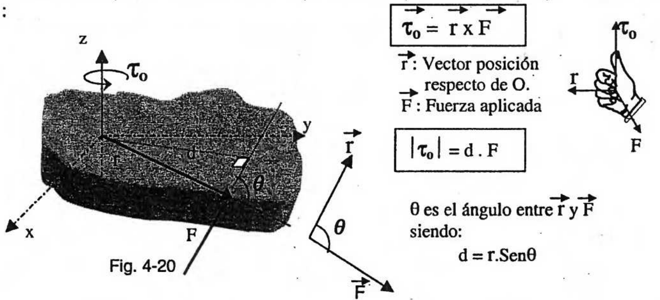
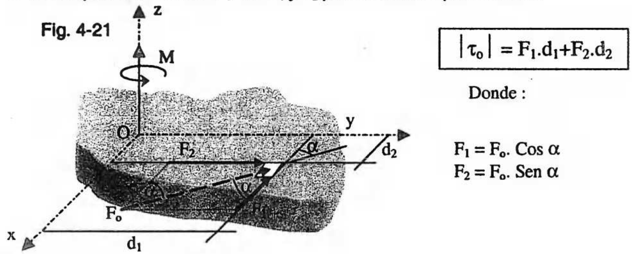


Fig. 4-20

Al descomponerse la fuerza F_o en F_1 y F_2 producen un torque resultante



$$|\tau_o| = F_1.d_1+F_2.d_2$$

Donde :

$F_1 = F_o. \text{Cos } \alpha$
$F_2 = F_o. \text{Sen } \alpha$

Si alguna vez has empleado una llave de tuercas, una corta y otra larga, también sabes que la llave con el mango largo permite apretar o aflojar las tuercas con menor esfuerzo, mientras que con la llave de mango corto se requerirá de mucho mayor esfuerzo.

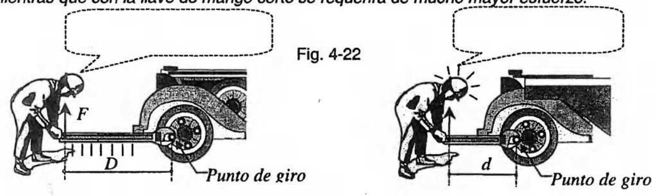


Fig. 4-22

4.10 EQUILIBRIO DE UN CUERPO RIGIDO O EXTENDIDO

Al observar detenidamente una escalera que descansa apoyada sobre dos superficies (cuerpo en reposo) y a un bloque que desciende por un plano inclinado de manera uniforme (cuerpo con M.R.U.) notaremos a primera vista que se trata de cuerpos en diferentes situaciones pero con algo en común, esto es que ambos mantienen constante su velocidad con el transcurrir del tiempo. Se dice pues entonces que estos cuerpos están en un estado de equilibrio de traslación y rotación.

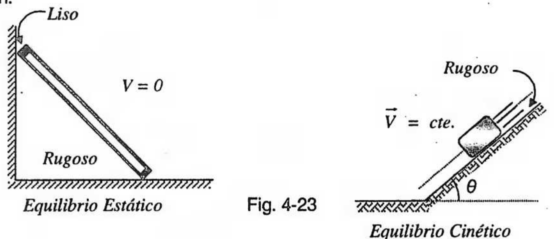


Fig. 4-23

Un cuerpo rígido o extendido está en equilibrio de traslación y rotación si se cumple simultáneamente:

1º Condición de equilibrio :

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_X = 0 \quad \sum F_Y = 0$$ (Para la traslación)

2º Condición de equilibrio :

$$\sum \vec{\tau}_O = 0$$ (Para la rotación)

Aplicación :

Realizamos el Diagrama de Cuerpo Libre para la escalera :

Por la primera condición de equilibrio se cumple :

$$\sum F = 0$$

$$N + F_G + R = 0$$

y como el cuerpo no rota entonces de la segunda condición de equilibrio:

$$\sum \tau_O = 0$$

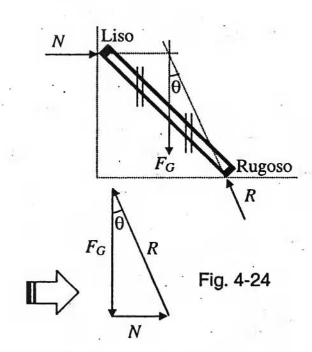


Fig. 4-24

Esta suma de torques es cero con respecto a cualquier punto dentro o fuera del cuerpo.

MAQUINAS SIMPLES

Son aquellos dispositivos que nos proporcionan una ventaja mecánica esto es aplicando una menor fuerza para lograr el mismo objetivo.

A) El Plano Inclinado.- Es una máquina simple que nos permite elevar cuerpos con la menor fuerza posible.

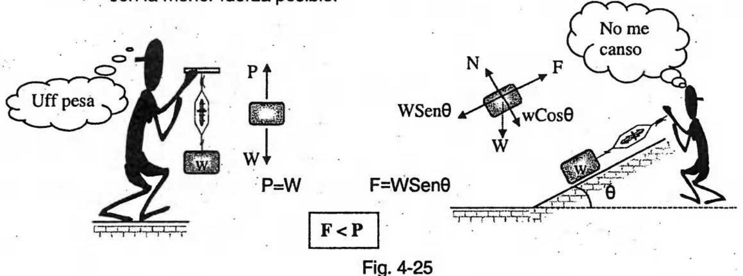


Fig. 4-25

B) Poleas.- Permite cambiar la dirección de la fuerza y el incremento de poleas permite disminuir la fuerza aplicada

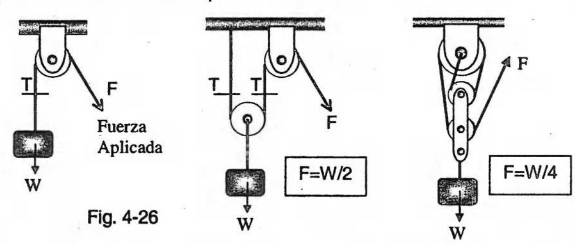


Fig. 4-26

C) Palancas.- **Nos permite disminuir la fuerza aplicada en la medida que se aumenta la distancia entre esta fuerza aplicada y el punto de apoyo. Su acción se basa en la aplicación de torques respecto de un apoyo.**

Para el equilibrio se cumple: $a.F_1 = b.F_2$

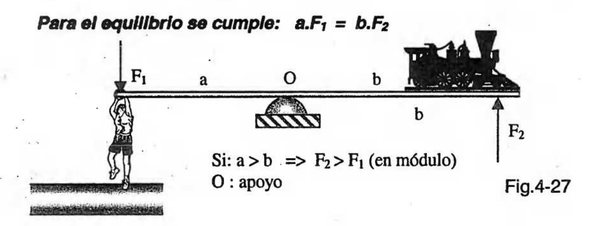
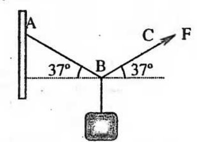


Fig.4-27

PROBLEMAS

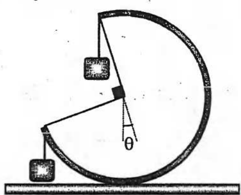
1.- Entre qué limites debe variar el módulo de F, para que los cables AB y BC estén tensos. El bloque gravita con 120N y está en equilibrio.



Rpta: 100 N < F < 200 N

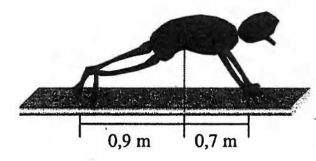
2. Un bloque descansa sobre un plano horizontal liso. Se le aplican tres fuerzas concurrentes y coplanares, el primero en la dirección E 37º N, el segundo en dirección E 53º S y con valores de 10 N y 5 N respectivamente. Calcular el valor mínimo que debe tener el tercero para que el bloque se mueva hacia el este con rapidez constante.
Rpta: 2 N

3. Calcular el ángulo θ para el equilibrio. Las masas de los bloques son iguales a 2 kg. Y la masa del alambre en forma de tres cuartos de circunferencia es 4π kg. No hay fricción.



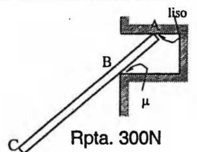
Rpta : 8º

4. Hans realiza un ejercicio de levantar su cuerpo con las manos, su centro de gravedad se encuentra directamente sobre el punto P del suelo, el cual dista 0,9m de sus pies y 0,7m de sus manos. Si su masa es de 65 kg. ¿Cuál es la fuerza ejercida por el suelo sobre sus manos?(g=10m/s^2)



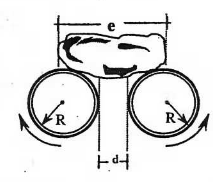
Rpta: 36,56 N

5. La barra homogénea de 10kg se halla en equilibrio (6AB=AC); g=10m/s^2. Determine el módulo de la reacción sobre la barra en A.



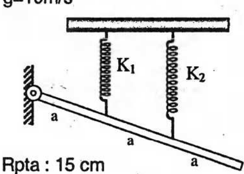
Rpta. 300N

6. Dos cilindros de radios 20cm cada uno, rotan en sentidos opuestos y forman parte de una trituradora de piedra. La distancia d=4cm es el máximo tamaño deseado del triturador. El μ entre los cilindros y las piedras es √3 (para casos especiales). Determine el tamaño e de las piedras que entran en la trituradora por fricción



Rpta : 24 cm.

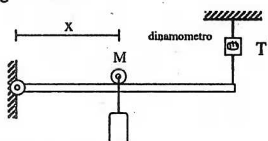
7. Una barra homogénea de 14kg se halla en equilibrio. Determinar la suma de las deformaciones que experimentan los resortes de rigideces K_1 = 200N/m ; K_2=300N/m. Los resortes se encuentran sin deformar cuando la barra se encuentra horizontal; g=10m/s^2



Rpta : 15 cm

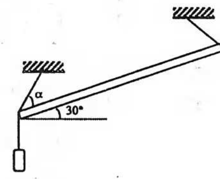
8. Si lo que marca el dinamómetro electrónico está en función de lo que se desplace el rodillo ingrávido M mediante:
T = 16x + 8
Donde x esta en metros y T en Newton. Determinar la longitud de la barra homogénea, considerando

que el bloque es de 8 kg; $g = 10m/s^2$



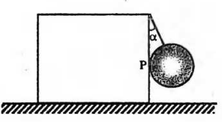
Rpta : 5 m

9. Para qué valor de α habrá equilibrio en el sistema, si se sabe que el contacto en el extremo inferior, entre la cuerda y la barra ingravida, es lisa



Rpta : 60º

10. Para que valor de α el bloque cúbico homogéneo de 4kg esta a punto de volcar. La esfera es de 3kg. (P punto medio)



Rpta : 53º

Capítulo 

Dinámica

5.1 INTRODUCCIÓN


ISAAC NEWTON

En los capítulos de cinemática y estática hemos estudiado en forma separada los conceptos de aceleración y fuerza. En el capitulo de cinemática sólo analizamos los elementos que intervienen en la descripción del movimiento de una partícula. Ahora corresponde estudiar la razón por la cual las partículas (cuerpos) se mueven en la forma que lo hacen.

A la pregunta ¿Cómo puede un pequeño motor acoplado a un sistema de poleas, desplazar cierta altura, bloques de peso considerable y luego detenerlos? La respuesta a esta pregunta y otras similares la encontramos en la Dinámica.

La Dinámica es una parte de la mecánica que estudia las relaciones entre el movimiento de los cuerpos y las causas que la producen.

El movimiento de un cuerpo es el resultado de las interacciones con otros y de las condiciones iniciales. Es importante tener presente lo que tienen en común las distintas interacciones para expresarlas cuantitativamente y relacionar las interacciones con los movimientos mismos.

En el presente capitulo usaremos las cantidades cinemáticas tales como desplazamiento, velocidad y aceleración, adicionando los conceptos de fuerza y masa.

5.2 SEGUNDA LEY DE NEWTON

Introducción

Al estudiar la primera Ley de Newton vimos que si la resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es nula, este cuerpo se encuentra en reposo o en M.R.U.; en cualquiera de estos casos la aceleración del cuerpo es nula

Luego si R = 0, tendremos a = 0

Pero, si sobre el cuerpo actúa una fuerza resultante distinta de cero, el movimiento deja de ser rectilíneo uniforme para pasar a ser variado o curvilíneo o ambas cosas a la vez.

Por tanto para mantener un movimiento variado o curvilíneo es necesario aplicar sobre el móvil una fuerza resultante distinta de cero.

PRIMER EXPERIMENTO:

Ahora vamos a considerar un sencillo experimento, para analizar la relación entre la fuerza que actúa sobre el cuerpo y la aceleración producida. Supongamos que tenemos un bloque muy ligero que puede moverse sin fricción, sobre una superficie horizontal, y se le aplica una fuerza horizontal como se muestra en la Fig. 5.1, entonces el bloque adquiere una aceleración $\bar{a}$, la aceleración que adquiere el bloque puede determinarse midiendo el cambio en la rapidez en un tiempo conocido.

Repitiendo el paso con diversos valores de la fuerza $\bar{F}$, comprobamos que:

Si aplicamos al bloque fuerzas $2\bar{F}$, $3\bar{F}$, $4\bar{F}$ ..., observamos que la aceleración es $2\bar{a}$, $3\bar{a}$, $4\bar{a}$, ... luego del experimento concluimos que:

La fuerza $\bar{F}$ que actúa sobre un cuerpo es directamente proporcional a la aceleración que adquiere (Ver Gráfico 5.1)

Tabulando los valores de a y F, se obtiene la gráfica 5.1.

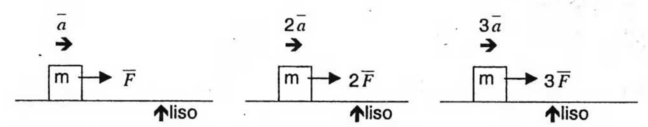


Fig. 5.1 Variación de la aceleración con la fuerza

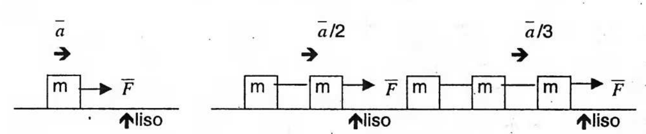


Fig. 5.2 Variación de la aceleración con la masa

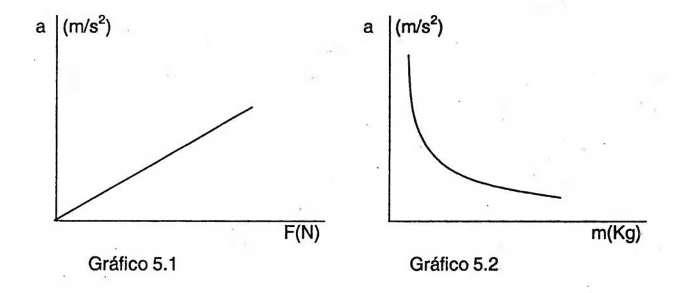


Gráfico 5.1 Gráfico 5.2

5.3 MASA (m)

La masa de un cuerpo es una constante que es característica del mismo, que no cambia cuando el cuerpo es trasladado de un lugar a otro y que dinámicamente se manifiesta como el grado de oposición que ofrece el cuerpo a los cambios de su movimiento (inercia del cuerpo).

Cuanto mayor es la masa, más se "resiste" un cuerpo a ser acelerado.

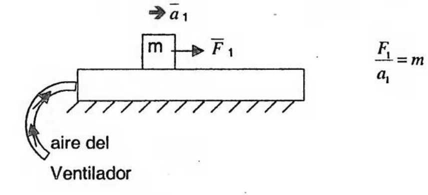
En forma cuantitativa la masa de un cuerpo se determina en general como el cociente entre el módulo de la fuerza que actúa sobre el cuerpo y el módulo de la aceleración que produce en él, es decir:

$$m = \frac{F}{a}$$

Esta afirmación puede comprobarse experimentando con un riel de aire lineal que es un aparato útil para estudiar el movimiento de objetos en condiciones que se aproxima a una fricción nula (superficie lisa).

Los diminutos chorros de aire crean una fuerza hacia arriba que equilibra el peso del deslizador de masa m, (ver Fig. 5.3).

Se puede medir la fuerza que actúa sobre el deslizador y la aceleración que adquiere el mismo midiendo el cambio de rapidez en un tiempo conocido:



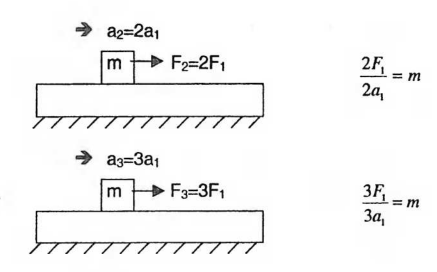


Fig. 5.3

Esto significa que la proporción entre la fuerza y la aceleración es una constante: $\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = m = constante$.

Gráfico a-F

I) Para un cuerpo de masa "m" sometida a varias fuerzas.

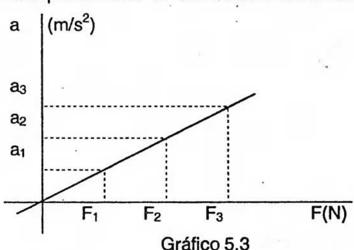


Gráfico 5.3

La pendiente de la recta es la inversa de la masa.

$$\text{Pendiente} = \frac{1}{masa}$$

II) Para varios cuerpos de masas distintas, sometidos a varias fuerzas.

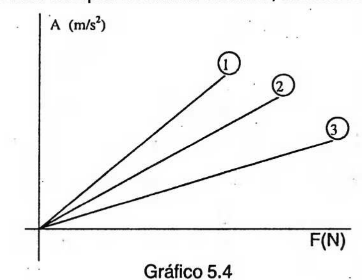


Gráfico 5.4

$$\text{Pendiente (1)} = \frac{1}{m_1}$$

$$\text{Pendiente (2)} = \frac{1}{m_2}$$

$$\text{Pendiente (3)} = \frac{1}{m_3}$$

También es válido afirmar que la masa es igual a la relación del peso del cuerpo sobre la aceleración de la gravedad provocada por un planeta, pero esta afirmación podría tener restricciones debido a que en una región del espacio sideral donde un cuerpo estuviese aislado, lejos de la influencia de cualquier cuerpo celeste, es decir, en una región donde pudiera tener la total falta de gravedad, no se podría medir la masa del cuerpo pues el objeto no tendría peso. Por otra parte, la masa del cuerpo si se podría medir mediante la relación $m = \frac{F}{a}$ que es válida en cualquier caso, el cual analizamos inicialmente.

La masa es una cantidad escalar, en el S.I. se expresa en (Kg).

NOTA:

1) Definir la masa de un cuerpo como la cantidad de materia concentrada que posee, no sería una buena forma de definir la masa porque no hay una forma práctica de contar el número de protones, electrones y neutrones que contiene.

2) En dinámica consideramos a la masa, como una constante siempre que su velocidad sea pequeña en comparación con la velocidad de la luz (c), puesto que la masa varía según una de las ecuaciones de la teoría de la relatividad mediante:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

m_0 = masa inicial (en reposo)

V = velocidad del cuerpo

c = Velocidad de la luz = 300 000Km/s (aprox.)

m = masa del cuerpo a la velocidad "v"

Si v<<<c ➾ m = m_o = Constante

5.4 PESO (w)

Es la fuerza de atracción gravitacional que ejerce un planeta sobre un cuerpo, su magnitud es dependiente de la aceleración de la gravedad y de la masa del cuerpo; está dirigida hacia el centro del planeta.

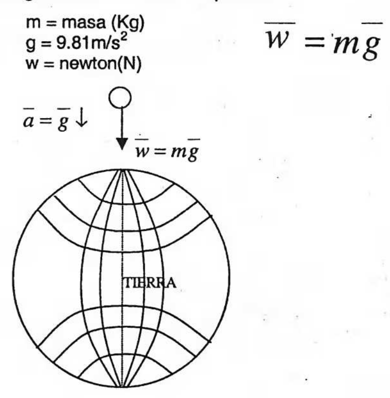


Fig. 5.4

Segundo experimento:

Esta vez mantendremos constante la fuerza aplicada $\overline{F}$, y variaremos la masa agregando sucesivamente, bloques de igual tamaño y masa; comprobamos que al ser colocados bloques de masas 2m, 3m, 4m ... observamos que la aceleración es $\frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \frac{a}{4}, ...$, tabulando los valores de a y m obtenemos la gráfica 5.2, luego del experimento concluimos que: si la fuerza $\overline{F}$ no cambia, entonces un aumento en la masa producirá una disminución proporcional en la aceleración. (Ver fig. 5.2.)

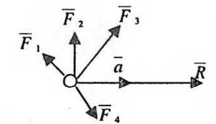
Por lo tanto, a partir de los experimentos anteriores estamos preparados para enunciar la segunda Ley de Newton que establece lo siguiente:

- Siempre que una fuerza resultante distinta de cero actúa sobre un cuerpo, produce una aceleración en su misma dirección y sentido que es

directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

Por lo tanto podemos establecer la siguiente relación:

$$\overline{R} = m\overline{a}$$



Donde:

$\overline{R}$ = Fuerza resultante (N)

m = masa del cuerpo (Kg)

$\overline{a}$ = aceleración (m/s^2)

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + ... + \overline{F}_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

También es posible establecer las relaciones siguientes:

$$\overline{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

$$\overline{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

en forma de componentes:

$R_x = ma_x$, $R_y = ma_y$, $R_z = ma_z$

La 2da. Ley de Newton sólo es valida en marcos de referencia donde el observador se encuentra en reposo o en M.R.U., esta ley no es valida en el marco de referencia donde el observador se encuentra moviéndose con aceleración. Segundo, las ecuaciones son validas solo si la masa es constante.

NOTA: Las leyes de Newton no son universales, requieren modificaciones para velocidades muy altas (cercanas a la de la luz) y para tamaños muy pequeños (dentro del átomo).

5.5 APLICACIÓN

Una maquina de ATWOOD se compone de una polea fija con masas suspendidas en cada lado, este sistema se puede utilizar para determinar la aceleración de dos bloques, el esquema siguiente corresponde a una versión simplificada de muchos sistemas industriales.

En el esquema mostrado en la fig. 5.5 se tiene dos masas m_1 y m_2, sabiendo que $m_2 > m_1$, hallar la aceleración de los bloques considerando que no hay rozamiento en la polea fija.

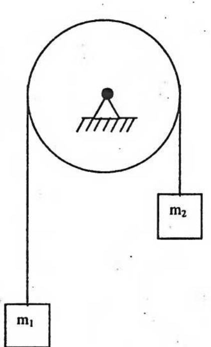
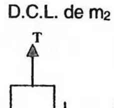


Fig.5.5

Solución

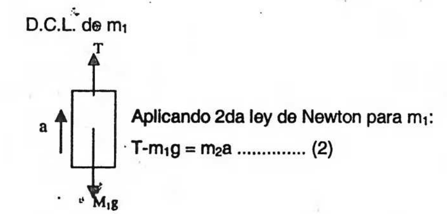
D.C.L. de m_2



Aplicando 2da. Ley de Newton para m_2:

$m_2g - T = m_2 a$ .... (1)

D.C.L. de m_1



Aplicando 2da ley de Newton para m_1:

$T - m_1g = m_2a$ .... (2)

Sumando (1) + (2)

$m_2g - m_1g = a\,(m_1 + m_2)$

$$\therefore a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

5.6 FUERZAS EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR

Supongamos que un móvil pasa por un punto "P" con velocidad $\vec{V}$ entonces:

a) Si sobre el móvil no actuase fuerza alguna, ésta continuaría con M.R.U. (Fig. 5.6) por la 1ra Ley de Newton.

b) Si sobre el móvil actuase una fuerza resultante en la misma dirección de la velocidad, ésta ocasionaría una alteración solo en el módulo de su velocidad pero no de su dirección (Fig. 5.7) por la 2da Ley de Newton.

c) Si sobre él actuase una fuerza resultante oblicua a la velocidad $\overline{V}$ (Fig. 5.8) esto ocasionaría una alteración en el módulo y en la dirección de su velocidad, produciendo un movimiento curvilíneo.

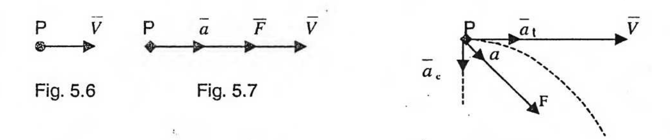


Fig. 5.6 Fig. 5.7

Fig. 5.8

En el tema de cinemática circular vimos que en general la velocidad de un móvil varia en módulo y dirección por tanto la aceleración $\overline{a}$ tiene dos componentes: la aceleración centrípeta ($\overline{a}_c$) y la aceleración tangencial ($\overline{a}_t$)(Fig. 5.8).

Luego por la segunda ley de Newton la aceleración $\overline{a}$ debe tener la misma dirección que la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo.

Entonces aplicando la 2da ley de Newton:

$\overline{F} = m\overline{a}$.............(1)

Por cinemática circular sabemos que: $\overline{a} = \overline{a}_c + \overline{a}_t$................(2)

$\overline{F} = m(\overline{a}_c + \overline{a}_t)$

$F = m\overline{a}_c + m\overline{a}_t$

De la suma, al primer término ($m\overline{a}_c$)se le denomina fuerza centrípeta (F_c), al segundo término ($m\overline{a}_t$) se le denomina fuerza tangencial (F_t) por tanto:

$$\overline{F} = \overline{F}_c + \overline{F}_t$$

Como $\overline{a}_t$ es colineal con la velocidad $\overline{V}$ entonces $\overline{F}_c$ es perpendicular a la velocidad $\overline{V}$, luego $\overline{F}_c$ es perpendicular a $\overline{F}_t$ (Ver Fig. 5.9) de los dos

términos $\overline{F}_c$ y $\overline{F}_t$ la de mayor trascendencia es $\overline{F}_c$ puesto que esta es la causante de que la trayectoria de la partícula P sea circular.

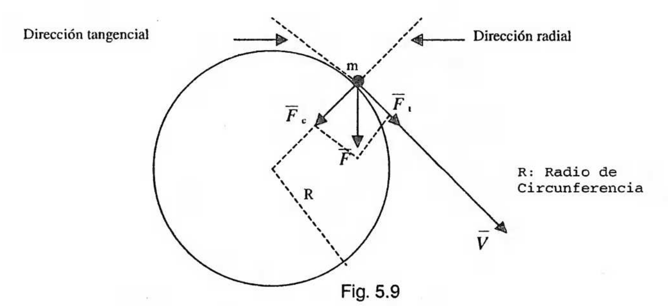


Fig. 5.9

5.6.1 FUERZA CENTRÍPETA ($\overline{F}_c$).

Es la fuerza resultante en la dirección radial y es la responsable del cambio de dirección de la velocidad, luego es la fuerza que origina todo movimiento circular; ésta fuerza centrípeta, se determina aplicando la 2da Ley de Newton, se tiene:

$$\overline{F}_c = m\overline{a}_c \qquad \text{donde: } a_c = \frac{V^2}{R}$$

5.6.2 FUERZA TANGENCIAL ($\overline{F}_t$).

Es la fuerza resultante en la dirección tangencial y es la fuerza responsable del cambio del módulo de la velocidad. Esta fuerza posee la misma dirección que la aceleración tangencial, luego aplicando la segunda Ley de Newton se tiene:

$$\overline{F}_t = m\overline{a}_t$$

Luego la fuerza total que actúa sobre el cuerpo es:

$$\overline{F} = \overline{F}_c + \overline{F}_t$$

Como $\overline{F}_c$ es perpendicular a $\overline{F}_t$ entonces:
(Ver Fig. 5.9)

$$F = \sqrt{F_c^{\,2} + F_t^{\,2}}$$

F_t, F_c, F son los módulos de las fuerzas.

APLICACIONES

1) Supongamos que un automóvil se desplaza en una carretera plana y horizontal, cuando toma una de las curvas; como la trayectoria es curvilínea, la velocidad $\bar{V}$ del automóvil cambia constantemente de dirección. Entonces debe existir una fuerza centrípeta que actúe sobre el móvil. En este caso la fuerza centrípeta es proporcionada por la fricción entre los neumáticos y la carretera. (Ver Fig. 5.10)

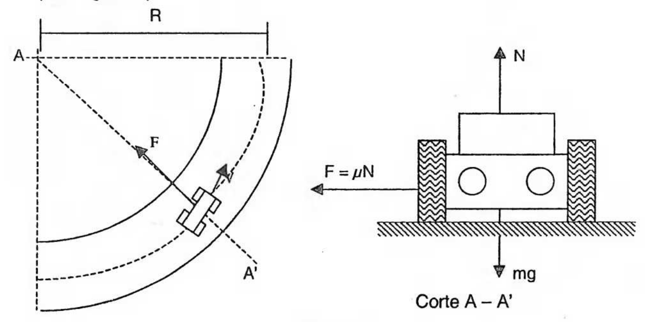


Fig. 5.10

2) Consideremos un cuerpo de masa "m" atado a una cuerda y se le hace girar en un plano vertical tal como se muestra en la figura 5.11, entonces cuando se encuentra en el punto "p" la aceleración centrípeta es producida solo por la tensión T_P de la cuerda y cuando pasa por el punto "q" la aceleración centrípeta es proporcionada por la tensión T_q y por la componente del peso en la dirección radial.

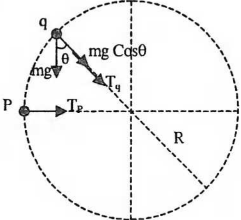


Fig. 5.11

El módulo de la fuerza centrípeta en p y q respectivamente es:

En P: $F_C = T_P$; En q: $F_C = mg\,Cos\theta + T_q$

3) Cuando un satélite artificial se encuentra en órbita alrededor de la Tierra, se puede considerar que la única fuerza que actúa sobre él es la fuerza $\overline{F}$ de atracción gravitacional de la Tierra sobre el satélite. Suponiendo que la órbita del satélite sea circular la fuerza $\overline{F}$ se halla dirigida hacia el centro de la Tierra, luego la fuerza $\overline{F}$ es la fuerza centrípeta del movimiento circular; y la Tierra es el agente responsable de la existencia de esta fuerza.

5.7 Sistema de Referencia Inercial (S.R.I.)

Este concepto es importante para tener en claro las leyes de Newton del movimiento.

Un sistema de referencia en el que son válidas las leyes de Newton son denominados Sistemas de Referencia Inerciales.

La Tierra es aproximadamente un S.R.I. (en verdad la Tierra no es un sistema plenamente inercial debido a la aceleración asociada a su rotación y a su movimiento alrededor del sol, como estos efectos son pequeños los consideramos despreciables).

En general se consideran S.R.I. aquellos sistemas que no aceleran, es decir a aquellos que se encuentran en reposo o que se encuentran con velocidad constante.

Ahora consideremos una paloma P de masa "m" que se desplaza en el aire con una aceleración y movimiento respecto al observador "O" (fijo) y un observador O' que se mueve con velocidad constante de acuerdo a las posiciones siguientes:

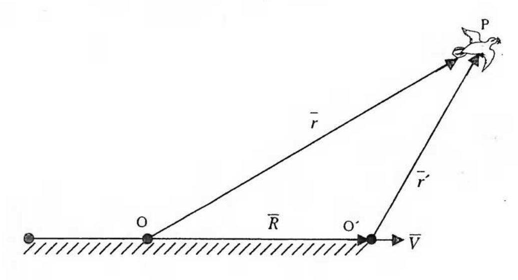


Fig. (5.12)

De la Fig. (5.12): Si transcurre un intervalo de tiempo Δt, entonces la paloma y el observador O' se han desplazado de modo que: $\bar{r} = \bar{r}' + \bar{R}$ .... (1)

$\Delta\bar{r} = \Delta\bar{r}' + \Delta\bar{R}$

Dividiendo entre Δt y sabiendo que: $\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$

Luego utilizando (1) la relación de velocidades es: $\bar{V}_P = \bar{V}' + \bar{V}$ ----- (2)

Donde: $\bar{V}_P$: Velocidad de la Paloma respecto a O

$\bar{V}$: velocidad de O' respecto a O

$\bar{V}'$: Velocidad de la paloma respecto a O'

En el intervalo Δt también cambian las velocidades y por otro lado, sabemos que: $\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}$

Como, $\bar{V} =$ **cte** en el limite $\Delta\bar{V} = \mathbf{0}$

Utilizando (2) la relación de aceleración es: $\bar{a} = \bar{a}'$

Por tanto, la aceleración de la paloma respecto a los observados "O" y "O´" son iguales.

Como m = cte.

$m\bar{a} = m\bar{a}'$

$\bar{F} = \bar{F}'$

Ejemplo:

Un sistema S' se mueve según su eje X con una velocidad de $5\hat{i}$ m/s y observa un móvil que se mueve con una velocidad de $2\hat{i}+3\hat{j}$ m/s. ¿Cuál es la velocidad del móvil respecto a tierra?

Solución:

$\overline{V}_P = \overline{V} + \overline{V}'$

Reemplazando $\overline{V}_P = \overline{V} + \overline{V}' = 5\hat{i}+(2\hat{i}+3\hat{j})$

$= 7\hat{i}+3\hat{j}$ Rpta. $\overline{V}_P = 7\hat{i}+3\hat{j}$ m/s

5.8 GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Introducción

Podemos considerar la astronomía como la más antigua de las ciencias, la cantidad y precisión de los datos astronómicos conseguida desde épocas remotas son importantes.

Uno de los problemas que preocupaban a los pueblos antiguos fué el movimiento del sol, de la luna y los demás cuerpos del firmamento. Otro de los problemas que ha intrigado al hombre desde los albores de la civilización ha sido el movimiento de los cuerpos celestes. Quizá uno de los procesos más interesantes en la historia de la ciencia ha sido comprender el movimiento planetario, para lo cual se crearon modelos.

Modelo Geocéntrico

La primera hipótesis relacionada con el movimiento planetario consistió en suponer que los planetas describían círculos concéntricos, teniendo a la tierra en su centro. Sin embargo, no se explica el movimiento observado de estos cuerpos con respecto a la Tierra, y la geometría del movimiento planetario se hizo muy complejo. El astrónomo Ptolomeo desarrolló la teoría de las epicicloides, tal como se muestra:

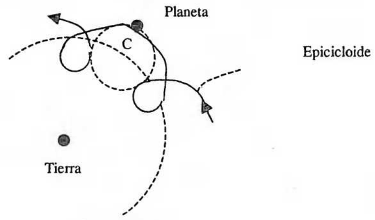


Figura 5.13

Esta descripción se acepta hasta el siglo XVI, a pesar de que también requiere ciertos ajustes para concordar plenamente con las observaciones.

Modelo Heliocéntrico

El modelo geocéntrico se sustituye por el modelo heliocéntrico, en el cual el Sol ocupa el centro del sistema planetario. El Sol, el astro mas grande de nuestro sistema planetario, coincide con el centro de masa del sistema. La primera formulación fué dada por el polaco Nicolás Copérnico, tal como muestra la siguiente figura:

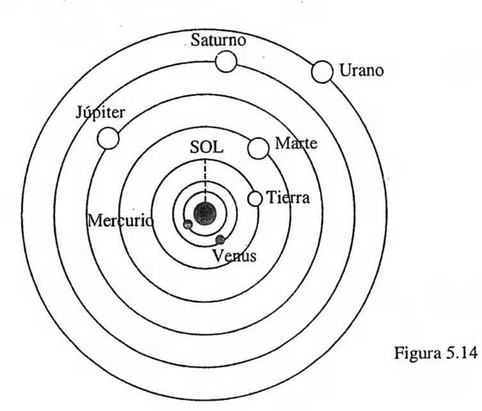


Figura 5.14

Supuso que los planetas se mueven a distancias cada vez mayores del Sol, en el esquema mostrado todavía no había sido descubierto el planeta Plutón. Este modelo fue perfeccionado por Johannes Kepler que concluye que las órbitas planetarias son elipses alrededor del Sol y éste se encuentra en uno de los focos de las elipses.

5.9 Leyes de Kepler

Kepler sintetiza el movimiento planetario en las 3 leyes siguientes:

1ra. Ley de las órbitas. Establece: Los planetas describen órbitas elípticas alrededor del Sol ocupando éste uno de sus focos.

2da. Ley de las áreas. Establece: La recta que une un planeta cualquiera con el sol (radiovector) describe áreas iguales en tiempos iguales, ver fig. (5.16)

3ra. Ley de los periodos. Establece: Los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al sol.

En matemática la elipse es una curva cerrada similar al ovalo, tal como lo muestra la fig. 5.15.

F Y F´ son los focos.

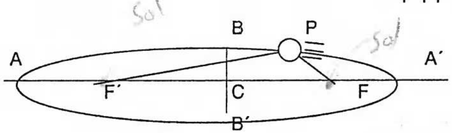


Figura 5.15

Propiedad: PF´ + PF = constante ;

AA´ = 2a, BB´ = 2b

Centro de simetría: C

Semieje mayor: $\frac{AA'}{2} = a$

Semieje menor: $\frac{BB'}{2} = b$

Análisis de las Leyes de Kepler:

1ra LEY

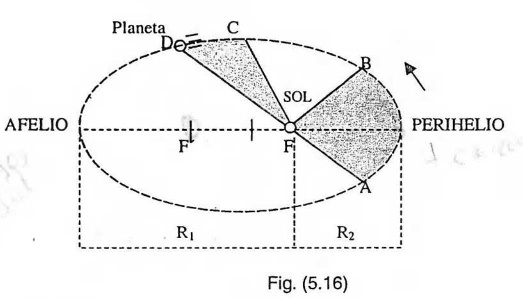


Fig. (5.16)

2da LEY

Para la ley de áreas si el planeta está en A y al cabo de un tiempo está en B. el área descrita por el radio vector será el sector FAV. Si volvemos a ver el planeta durante el mismo tiempo en la trayectoria CD, se puede demostrar que el área descrita FCD es igual al área FAB.

3ra LEY

Si T es el periodo de revolución de un planeta y R_m es el radiovector medio, la tercera ley de Kepler matemáticamente se expresa por la relación siguiente:

$$T^2 = KR^3_m$$

Luego para dos planetas se cumplen que:

$$\frac{T_1^2}{R^3_{m_1}} = \frac{T_2^2}{T^3_{m_2}}$$

Donde:

K: Es una constante de proporcionalidad que es la misma para todos los planetas.

$$Rm = \frac{R_1 + R_2}{2} = \text{semieje mayor} = a$$

Los planetas se mueven mas rápido en el perihelio o cuando están mas cerca al sol, en cambio el movimiento es mas lento en el afelio porque están más distante al sol. En el caso de la Tierra su velocidad en el perihelio es $2,92 \times 10^4$ m/s y en el afelio es $2,64 \times 10^4$ m/s.

5.9.1 Ley de Gravitación Universal

La siguiente etapa de la historia de la astronomía fue una discusión de la dinámica del movimiento planetario y determinar la interacción responsable de tal movimiento.

Es aquí donde Isaac Newton dio su grandiosa contribución, la Ley de Gravitación Universal.

Los cuerpos ubicados en la cercanía de la superficie terrestre están sometidos a una fuerza denominada peso, debido a la atracción de la Tierra. Newton en su análisis observa que la aceleración con que la Tierra atrae a todos los cuerpos próximos a su superficie debía ser la misma que obliga a la luna a moverse alrededor de la Tierra y a los planetas alrededor del Sol.

Entonces sugiere la hipótesis que todos los cuerpos tienden a atraerse, que es la propiedad universal de la materia que se denomina gravitación.

Dinámica del movimiento planetario

La explicación del movimiento planetario dada por las leyes de Kepler es una descripción cinemática. El caso siguiente es determinar la fuerza que actúa en cada planeta.

La primera Ley de Kepler establece que la órbita de un planeta es una elipse. Un caso particular de elipse es un circulo en el cual los dos focos coinciden con el centro. Las órbitas planetarias pueden aproximarse a estas circulares.

La forma de calcular la fuerza central con la distancia es muy simple en el caso de órbitas circulares.

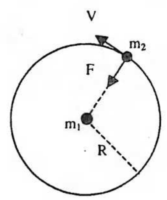


Figura 5.17

En la figura 5.17 observamos que m_2 describe una órbita circular bajo la acción de otra masa m_1. La fuerza de atracción debe ser igual a la fuerza centrípeta que produce el movimiento circular.

Luego $F= mw^2R$, haciendo $W = \frac{2\pi}{T}$, la fuerza de atracción entre m_1 y m_2 es:

$$F = \frac{4\pi^2 m_2 R}{T^2}$$

Por la tercera Ley de Kepler $T^2 = KR^3$, ya que en el caso de órbita circular la distancia media es igual a R.

Sustituyendo: $F = \frac{4\pi^2 m_2 R}{KR^3} = \frac{4\pi^2 m_2}{KR^2}$ ó $F = (Cte)\frac{m_2}{R^2}$

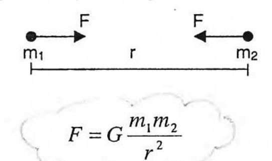
Por la 3ra. Ley de Newton F también es proporcional a m_1, luego:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$$

Donde "G" es una constante. Entonces ahora podemos enunciar la Ley de gravitación.

Ley de Gravitación Universal

Dados dos cuerpos puntuales de masas m_1 y m_2 separados por una distancia r. La ley de gravitación enunciada por Newton establece, que la fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos, es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, luego:



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Donde "G" es la constante de proporcionalidad llamada constante de Cavendish. Cuando F se mide en newton (N), m_1 y m_2 en Kg y r en m. el valor de G es:

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{N \bullet m^2}{Kg^2}\ \text{ó}\ \frac{m^3}{Kg \cdot s^2}$$

Además de valer para partículas, esta fórmula vale para cuerpos esféricos, donde

r es distancia de centro a centro.

Cálculo de la masa de la tierra

Habiendo obtenido el valor de G con una báscula de torsión y considerando R = 6370 Km y además como la Tierra atrae a todo cuerpo que está en su entorno con una fuerza gravitacional igual a su peso.

Aplicando la Ley de Gravitación

$$F = G\frac{mM}{R^2} \text{.......}\ (1)$$

Pero

F= mg........ (2)

(1) = (2)

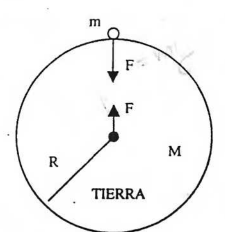


Fig. 5.18

$$mg = G\frac{mM}{R^2} \therefore M = g\frac{R^2}{G}$$

$$M = 9{,}8\frac{(6370x10^3)^2}{6{,}67x10^{-11}}$$

$M = 5{,}97 \times 10^{24}$Kg

Expresión matemática de la aceleración de la gravedad.

Consideremos un cuerpo, de masa m, situado a una distancia "h" respecto a la superficie terrestre, donde:

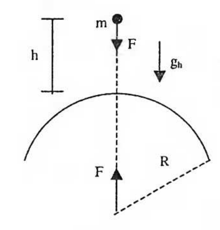


Fig. 5.19

Por la 2da. Ley:

$F = m\, g_h$ .... (1)

Por Gravitación:

$$F = G\frac{mM}{(R+h)^2} \text{ .... (2)}$$

(1) = (2)

$$mg_h = G\frac{mM}{(R+h)^2}$$

$$g_h = G\frac{M}{(R+h)^2} \text{ .... (3)}$$

si h ➔ 0, entonces $g_h = g = \frac{GM}{R^2} = 9{,}8$ m/s^2 (en la superficie)

La expresión (3) sólo es válida para calcular la aceleración de la gravedad de puntos exteriores a la superficie terrestre y en la superficie.

Movimiento de los satélites

Sabemos que hace relativamente poco, fue posible colocar un satélite artificial alrededor de la Tierra, pero ya en el siglo XVII Newton tenía una idea de la manera en que podía realizarse.

Ahora con la tecnología desarrollada para poner en órbita un satélite, debe elevarse mediante poderosos cohetes, hasta la altura "h" deseada, el valor de "h" varia notablemente de un satélite a otro, y ello depende de muchos factores. Una vez alcanzada la altura deseada, el satélite también por medio de cohetes es lanzado horizontalmente con una velocidad $\overline{V}$ (como se muestra en la figura 5.20), sabemos que la Tierra ejerce sobre dicho satélite una fuerza $\overline{F}$ de atracción, que alterará la dirección de la velocidad $\overline{V}$, haciendo que describa una trayectoria circular.

Cálculo de la velocidad del satélite.

Sea m = masa satélite

Por Ley de gravitación:

$$F = G\frac{Mm}{d^2} \text{.........} (1)$$

La fuerza centrípeta F es:

$$F = m\frac{V^2}{d} \text{.......} (2)$$

(1) = (2)

$$m\frac{V^2}{d} = G\frac{Mm}{d^2}$$

$$\therefore V = \sqrt{\frac{GM}{d}}$$

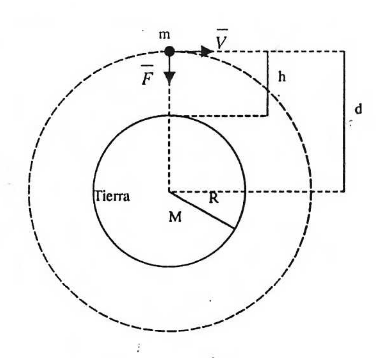


Fig. (5.20)

Si conocemos la altura o distancia radial "d" de un satélite en órbita, podemos calcular su velocidad para que logre entrar en órbita.

APLICACIÓN

Estos satélites se emplean para el estudio de los campos gravitacional y magnético de la Tierra, para la determinación de los recursos naturales (agua, minerales, condiciones atmosféricas).

Asimismo para transmitir señales de radio y televisión de un punto a otro distante, y como punto de referencia en navegación.

PROBLEMAS DE DINÁMICA

5.1 La figura 5.21 muestra un carro que se mueve con aceleración constante en dirección horizontal, se sabe que el bloque no se mueve respecto del carro. indique el diagrama de cuerpo libre del bloque.

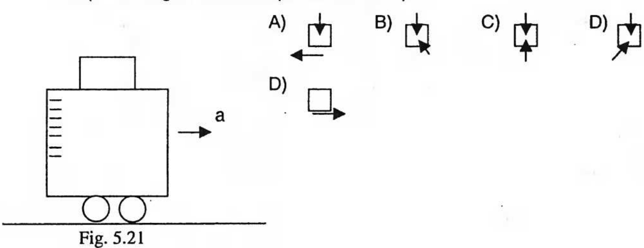


Fig. 5.21

SOLUCIÓN

Si el bloque está acelerado, debe existir una fuerza resultante en dirección de la aceleración, la fuerza normal debe ser de igual magnitud que el peso

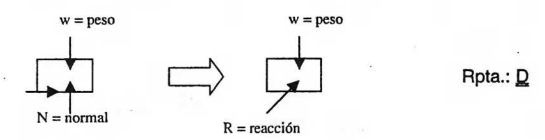


Fig. 5.22

Rpta.: D

5.2 Determine la magnitud de la tensión en la cuerda que une a los bloques A y B de masas 2M y M respectivamente, considere despreciable la masa de la polea y nulas las fuerza de fricción.

A) Mg B) 2Mg/3 C) 3Mg/4

D) 1,5Mg E) 2Mg

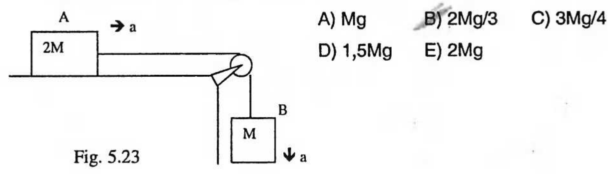
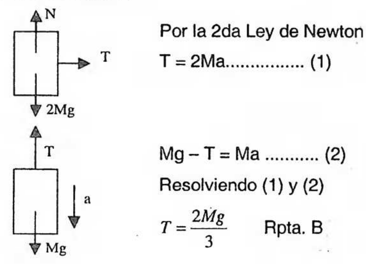


Fig. 5.23

SOLUCIÓN

Diagrama del bloque A



Por la 2da Ley de Newton

T = 2Ma................ (1)

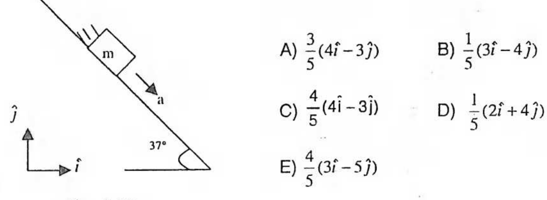
Mg – T = Ma .... (2)

Resolviendo (1) y (2)

$T = \dfrac{2Mg}{3}$ Rpta. B

Fig. 5.24

5.3 Determine la aceleración del bloque de masa "m" el cual se desliza sobre el plano inclinado áspero, si el coeficiente de rozamiento cinético entre las superficies es 0,25 (g=10m/s²)



A) $\frac{3}{5}(4\hat{i}-3\hat{j})$ B) $\frac{1}{5}(3\hat{i}-4\hat{j})$

C) $\frac{4}{5}(4\hat{i}-3\hat{j})$ D) $\frac{1}{5}(2\hat{i}+4\hat{j})$

E) $\frac{4}{5}(3\hat{i}-5\hat{j})$

Fig. 5.25

SOLUCIÓN

DCL bloque

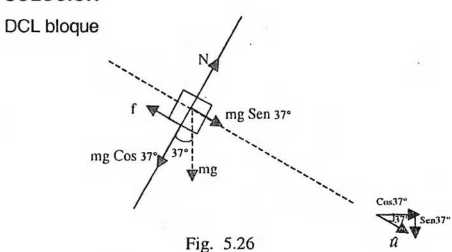


Fig. 5.26

$\Sigma Fy = 0$

$N - mg\ Cos\ 37° = 0$

$N = mg\ Cos\ 37°$ .... (1)

Por 2da Ley de Newton

$$a = \frac{FR}{m} = \frac{mgSen37° - uN}{m} \text{ .... (2)}$$

Reemplazando: (1) en (2)

$$a = \frac{mgSen37° - u(mgCos37°)}{m}$$

a= g(Sen37°-uCos37°)

$$a = 10\left[\frac{3}{5} - \frac{1}{4} x \frac{4}{5}\right]$$

$$a = 10\left[\frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right] = 10\left[\frac{2}{5}\right]$$

$a = 4\ m/s^2$

$$\overline{a} = a\hat{u}$$

$$\overline{a} = 4\left[Cos37°\hat{i} - Sen37°\hat{j}\right]$$

$$\overline{a} = 4\left[\frac{4}{5}\hat{i} - \frac{3}{5}\hat{j}\right]$$

$$\overline{a} = \frac{4}{5}(4\hat{i} - 3\hat{j})$$ Rpta. C

5.4 Una esferita de masa "m" unida a una cuerda describe una circunferencia vertical de radio R. Al pasar por su punto mas alto la tensión en la cuerda es "mg". Determinar el módulo de la velocidad angular en dicho punto. Si m = 0,3 Kg; $g = 10\ m/s^2$; R = 0,2 m

A) 12 rad/s B) 8 rad/s C) 5 rad/s D) 20 rad/s E) 10 rad/s

Solución

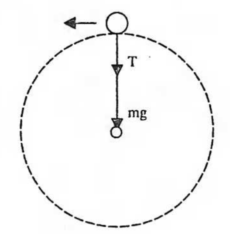


Fig. 5.27

ΣF (hacia el centro) = $mw^2 R$

$mg + T = mw^2R$ ...... (1)

Pero, $T = mg$ .... (2)

Reemplazando (2) en (1)

$mg + mg = mw^2R$ $2mg = mw^2 R$

$w^2 = \frac{2g}{R} = \frac{2(10)}{0,2}$ $w^2 = 100$

$w = 10$ rad/s Rpta. E

5.5 Determine la distancia (en Km) al centro del planeta A donde se debe encontrar el cuerpo de masa "m" para que la fuerza resultante sobre él sea nula. Se sabe que la masa de B es 1/4 de la masa de A.

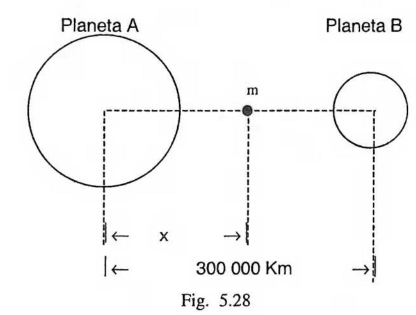


Fig. 5.28

A) $2x10^5$
B) 10^5
C) $25x10^4$
D) $175x10^2$
E) $27x10^4$

SOLUCIÓN

Diagrama de la masa "m"

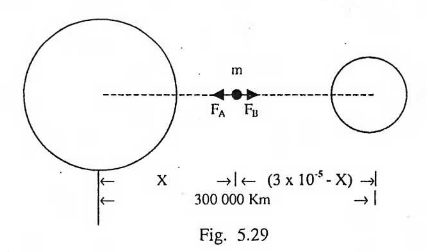


Fig. 5.29

Para el equilibrio $\sum \overline{F} = 0$

$F_A = F_B$

$$\frac{GM_A m}{X^2} = \frac{GM_B m}{(d-X)^2}$$

$$\frac{M_A}{X^2} = \frac{M_B}{(d-X)^2}$$

$$\frac{M_A}{M_B} = \left(\frac{X}{d-X}\right)^2$$

$$\frac{4}{1} = \left(\frac{X}{d-X}\right)^2$$

$$\frac{X}{d-X} = 2$$

$$X = \frac{2}{3}d = \frac{2}{3}(3x10^5)$$

$X = 2x10^5$ Km Rpta. A

5.6 En el esquema planetario mostrado, el planeta demora 6 meses para ir del punto A hacia P y de A hacia B 15 meses. Indique la(s) afirmación(es) correcta(s)

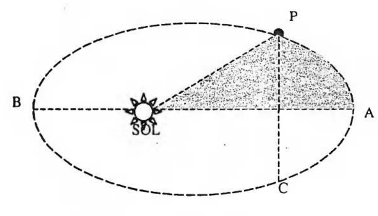


Fig. 5.30

I) El área sombreada representa la quinta parte del área del elipse.

II) El periodo del planeta es 30 meses.

III) El planeta demora 18 meses en ir del punto P al punto C.

A) Solo I B) Solo I y II C) Todas

D) Solo II y III E) Solo III

SOLUCIÓN

Por 2da Ley de Kepler

50% A---- 15 meses

X ---- 6 meses

$$X = \frac{6(50\%A)}{15}$$

$$X = \frac{A}{5}$$

t_{PB} = 9 meses

t_{BC} = 9 meses

t_{PC} = 18 meses

I) V II) V III) V

Rpta. C

Por la misma Ley:

50%A ---- 15 meses

100%A ---- t

$$t = \frac{100\%(15)}{50\%}$$

t=30 meses

5.7 Dos satélites A y B de igual masa se encuentran en órbitas de radio R_A y R_B respectivamente con respecto al centro de la Tierra, si A demora 8 veces el tiempo que demora B en dar una vuelta alrededor de la Tierra. Hallar R_A/R_B.

A) 1 B) 1/2 C) 2 D) 4 E) 8

SOLUCIÓN

Por 3ra Ley de Kepler (Ley de los periodos)

$$\frac{T_A^2}{R_A^3} = \frac{T_B^2}{R_B^3}$$

de donde:

$$\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^3 \text{........ (1)}$$

Además sabemos que:

$T_A = 8T_B$

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{8}{1}$$

Reemplazando (II) en (I)

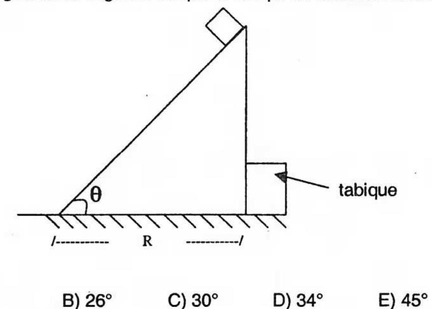
$$\left(\frac{8}{1}\right)^2 = \left(\frac{R_A}{R_B}\right)^3$$

$$\left(\frac{R_A}{R_B}\right)^3 = 64$$

$$\frac{R_A}{R_B} = 4$$

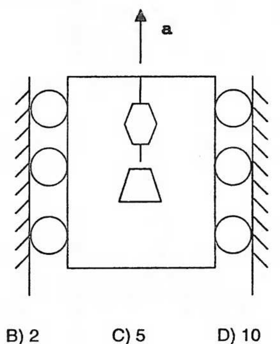
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un bloque de masa "m" al deslizarse desde el vértice de un plano inclinado triangular de base "R"; si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es 0,4 ¿Hallar el ángulo θ tal que el tiempo de deslizamiento sea mínimo?



A) 15° B) 26° C) 30° D) 34° E) 45°

2. Del techo de un ascensor se suspende un dinamómetro, el cual a su vez sostiene un cuerpo de 25N de peso. Si el dinamómetro indica 30N determine el módulo de la aceleración en (m/s^2); considere que el cuerpo está en reposo con respecto al ascensor.



A) 0,5 B) 2 C) 5 D) 10 E) 12

3. Un cuerpo esta sujeto a la acción de una fuerza única $\overline{F}$ haciéndolo que describa un movimiento circular uniforme. Indicar con verdadero (V) o falso (F) las afirmaciones siguientes:

I. Si $\overline{F}$ dejara de actuar, ¿El cuerpo seguirá en movimiento circular?

II. La fuerza $\overline{F}$ ocasiona variaciones en la dirección de $\overline{V}$ y en la magnitud de V.

A) FF B) VV C) VF D) FV

4. Se hace girar en un plano vertical un balde de agua lleno mediante una cuerda de 90cm de longitud. ¿Con qué velocidad angular mínima en rad/s debe girar el balde en su punto más alto para que el agua no se derrame? ($g=10m/s^2$)

A) 1,3 B) 2,5 C) 3,3 D) 4,6 E) 6,5

5. Un niño esta sentado sobre un plato giratorio a 4m del centro; el coeficiente de fricción estático entre el niño y el plato es 0.1, si la velocidad del sistema va aumentando paulatinamente, hallar su rapidez en m/s para que el niño empiece a deslizarse hacia el borde. ($g = 10\ m/s^2$)

A) 0,2 B) 0,5 C) 1,5 D) 3,5 E) 9,2

6. Señalar con verdadero (V) o falso (F) las afirmaciones siguientes:

I. Podría existir un planeta a una distancia r = 4 u.a. del sol y con un periodo de 8 años, u.a.=1.49×10^{11}m.

II. Podría existir un planeta a una distancia r = 10 u.a. del sol y con un periodo de 10 años.

A) VF B) FV C) VV D) FF

7. El cometa Halley tiene un periodo orbital T = 76 años alrededor del Sol. Si este cuerpo tiene su máximo acercamiento al Sol a una distancia 0,2a; donde "a" es

el semieje mayor de su orbita elíptica. Determine la distancia de mayor alejamiento, exprese su respuesta en términos de T y M del sol.

A) $1,8[gMt^2/4\pi^2]^{1/3}$ B) $0,9[gMt^2/4\pi^2]^{1/3}$

C) $3[gMt^2/4\pi^2]^{1/3}$ D) $6[gMt^2/4\pi^2]^{1/3}$

8. La velocidad angular del movimiento de rotación de Júpiter es aproximadamente 0.63 rad/h suponiendo que en Júpiter se instala un satélite geoestacionario empleado para telecomunicaciones ¿Cuál es su periodo en horas?

A) 10 B) 12 C) 18 D) 20 E) 24

9. Suponga que un satélite artificial transporta una bomba sujeta a la parte exterior de dicho satélite. Si luego que el satélite se encuentre en órbita, se soltase la bomba ¿Caerá sobre la tierra?

A) Si B) No C) Puede ser D) Faltan datos

10. Un planeta orbita alrededor del sol en una trayectoria circular con una velocidad angular de $6,5 \times 10^2$ rad/s. Si su distancia al sol es de 0.4×10^6 Km, hallar el área barrida por el radio vector del planeta en la unidad de tiempo (en Km^2/s)

A) 32×10^{12} B) 49×10^{12} C) 48×10^{12}

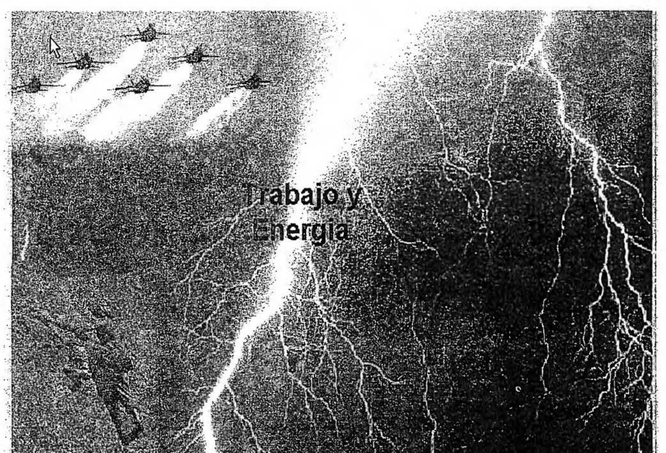
D) 52×10^{12} E) 14×11^{12}

Capítulo 

Trabajo y Energía

INTRODUCCIÓN

Es frecuente que una partícula en la naturaleza esté sujeta a una fuerza que varía con la posición de la partícula. Dichas fuerzas incluyen a las fuerzas gravitatorias y a las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo unido a un resorte. Describiremos las técnicas para tratar sistemas de este tipo con la ayuda de un desarrollo importante, llamado Teorema del trabajo y la energía.



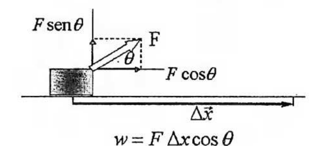
Comenzaremos describiendo el concepto de trabajo, el cual proporciona un eslabón entre los conceptos de fuerza y energía En este capitulo se tendrá interés en la forma mecánica de la energía. Se verá que los conceptos de trabajo y energía se pueden aplicar a la dinámica de un sistema mecánico sin recurrir a las leyes de Newton. Sin embargo, es importante notar que los conceptos de trabajo y energía se fundamentan en las leyes de Newton y, por lo tanto, no requieren ningún principio físico nuevo.
Los conceptos de trabajo y energía se pueden aplicar a una amplia variedad de fenómenos en los campos del electromagnetismo y la física atómica y nuclear.

Además, para una situación más compleja el enfoque de la energía a menudo puede proporcionar un análisis mucho más simple que la aplicación directa de la segunda ley de Newton.

6.1 Trabajo realizado por una fuerza constante:

Consideremos un objeto que experimenta un desplazamiento, Δx , a lo largo de una línea recta por la acción de una fuerza constante F, que forma un ángulo θ con el desplazamiento, tal como se indica en la figura 6.01

F es una fuerza constante



$$w = F\,\Delta x \cos\theta$$

Fig. 6.01: trabajo realizado por una fuerza constante

El trabajo realizado por una fuerza constante se define como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento

$$w = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r} \quad \text{.............6.01}$$

newton. metro = joule (N.m = J)

Como la componente de la fuerza paralela al desplazamiento es

$$F_{//} = F\cos\theta$$

podemos expresar el trabajo como:

$$w = F_{//}\Delta x \quad \text{.............6.02}$$

Entonces se puede decir que el trabajo es igual al producto de la componente de la fuerza paralela al desplazamiento por la magnitud del desplazamiento.
Sí graficamos $F_{//}$ versus X (ver figura 6.02)

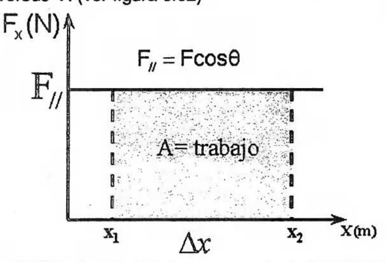


Fig. 6.02: el área encerrada representa el trabajo realizado por La componente de la fuerza paralela al desplazamiento

En toda gráfica, fuerza (solo su componente paralela al desplazamiento) versus desplazamiento, el área bajo la curva nos da el trabajo realizado por la fuerza.

Téngase en cuenta que el ángulo que forma la fuerza con el desplazamiento es muy importante pues:

- Si la fuerza tiene una componente en la misma dirección del desplazamiento, fig. 6.03 el trabajo es positivo

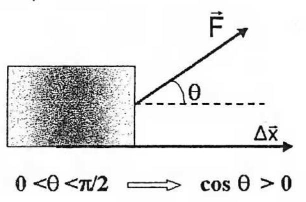


Fig. 6.03: la fuerza F realiza un trabajo positivo

- Si la fuerza es siempre perpendicular al desplazamiento fig. 6.04, el trabajo realizado por ella es cero

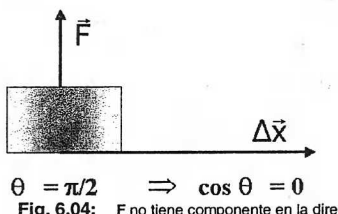


Fig. 6.04: F no tiene componente en la dirección del Desplazamiento por lo que su trabajo es cero

De esta ultima podemos decir que toda fuerza perpendicular al desplazamiento efectúa trabajo cero

- si la fuerza tiene una componente en dirección opuesta al desplazamiento fig. 6.05, el trabajo es negativo

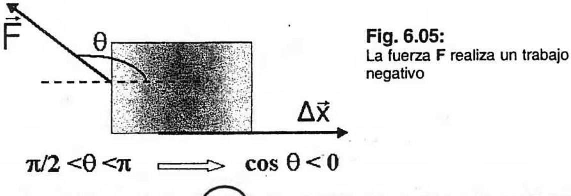


Fig. 6.05: La fuerza F realiza un trabajo negativo

Ejemplo 1:
Si una masa m= 5 Kg realiza un movimiento circular uniforme con una rapidez v=80 m/s fig. 6.06, determine el trabajo realizado por la fuerza centrípeta

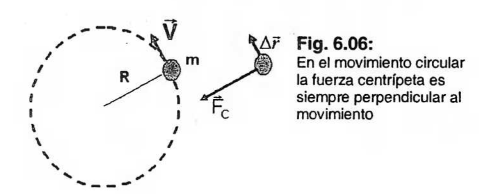


Fig. 6.06: En el movimiento circular la fuerza centrípeta es siempre perpendicular al movimiento

Solución:
El DCL de la masa nos indica que la fuerza centrípeta es siempre perpendicular al desplazamiento por lo tanto el trabajo es cero

Ejemplo 2:
En el sistema mostrado en la fig. 6.07 determínese el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúa sobre el bloque de 80 Kg θ =53

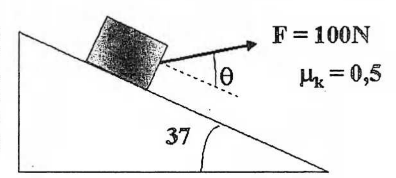


Fig. 6.07: El bloque se desliza sobre un plano inclinado 37° con la horizontal

6.2 Trabajo realizado por una fuerza variable:

Consideremos un objeto que se esta desplazando a lo largo del eje x, mientras una fuerza variable $F(x)$ actúa sobre ella tal como se indica en la figura 6.08:

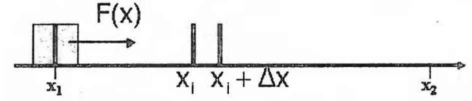


Fig. 6.08: en el intervalo $[x_i, x_i + \Delta x]$, Δx es tan pequeño que la fuerza en dicho intervalo se puede considerar constante e igual a **F**(x_i)

El objeto se desplaza a lo largo del eje x, desde $x=x_1$ hasta $x=x_2$. En este caso no podemos calcular el trabajo, como en el caso de una fuerza constante, pero

podemos imaginar que el objeto experimenta desplazamientos muy pequeños Δx, entonces la fuerza, **F(x)**, es aproximadamente constante sobre este intervalo, y para este pequeño desplazamiento el trabajo será:

$$\Delta w_i = F(x_i)\Delta x \quad \text{............6.03}$$

el trabajo total será entonces la suma de los trabajos realizados en cada uno de estos pequeños desplazamientos

$$W = \sum \Delta w_i = \sum F(x_i)\Delta\Delta \quad \text{............6.04}$$

esta manera de obtener el trabajo para el caso de una fuerza variable es bastante tediosa, sobre todo, si el desplazamiento que sufre el objeto es bastante grande, sin embargo es posible obtener el trabajo de una manera más sencilla si se conoce cual es la dependencia de la fuerza con la posición

Gráfica de F(x) versus x

Supongamos que la fuerza varía con la posición tal como se indica en la figura 6.09

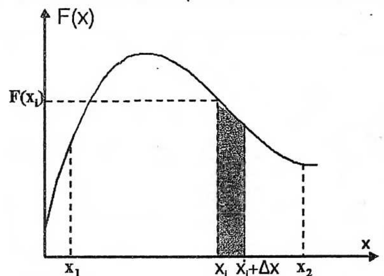


Fig. 6.09: gráfica F(x) versus x, el área sombreada es aproximadamente $F(x_i)\Delta x$

El área sombreada **de la figura** (entre x_i y $x_i + \Delta x$) es aproximadamente:

$$F(x_i)\Delta x \quad \text{...........6.05}$$

Si pretendemos calcular el área total entre x_1 y x_2 debemos dividir toda el área entre x_1 y x_2 en pequeñas áreas como la indicada en la figura 6.09 y luego sumarlas , esto nos daría;

$$A = \sum F(x_i)\Delta x \quad \text{............6.06}$$

esta ultima expresión es idéntica a la encontrada para el trabajo de una fuerza variable

$$A = \sum F(x_i)\Delta x = W \quad \text{............6.07}$$

es decir **el área bajo la curva es igual al trabajo realizado por la fuerza variable**

Ejemplo:
Trabajo realizado por un resorte:
Supóngase que el resorte inicialmente en su posición de equilibrio, es estirado una distancia x por una fuerza aplicada F_{apli} ,figura 6.10, si en esa posición el resorte se encuentra en equilibrio entonces por la ley de acción y reacción podemos afirmar que la fuerza que ejerce el resorte es de la misma magnitud pero en sentido opuesto, se puede comprobar experimentalmente que la magnitud de esta fuerza es proporcional a la deformación x que a sufrido el resorte desde su posición de equilibrio, es decir:

$$\vec{F} = -k\vec{x} \quad \text{............6.08}$$

el signo negativo nos indica que la fuerza apunta siempre hacia la posición de equilibrio

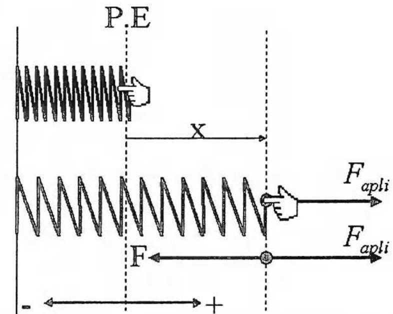


Fig. 6.10: Ley de Hooke; la fuerza F es proporcional a la deformación x que sufre el resorte y apunta siempre hacia la posición de equilibrio

Esta ley de fuerza para los resortes se conoce como la Ley de Hooke donde K es la constante elástica del resorte.

6.3 Medición experimental de la constante elástica de un resorte

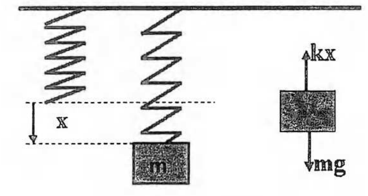


Fig. 6.11: determinación experimental de la constante elástica de un resorte

la masa m estira el resorte desde su posición de equilibrio una distancia x, en esta nueva posición de equilibrio:

$$kx = mg$$

de aquí inmediatamente obtenemos el valor de la constante elástica:

$$k = \frac{mg}{x} \quad \text{............6.09}$$

Conocida la fuerza podemos ahora determinar cual es el trabajo efectuado por esta fuerza variable en mover el resorte desde la posición inicial x_i hasta la posición final x_f

Supongamos que la fuerza aplicada estira muy lentamente el resorte tal como se indica en la figura 6.12

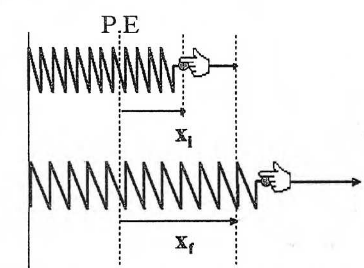


Fig. 6.12: El resorte se estira muy lentamente desde x_i hasta x_f por acción de la fuerza aplicada F_{apli}, en todo momento $F_{apli} + F = 0$

de esta manera en todo momento la fuerza aplicada es igual a la fuerza ejercida por el resorte

$$\vec{F}_{apli} + \vec{F} = \vec{0} \quad \text{............6.10}$$

entonces:

$$\vec{F}_{apli} = k\vec{x} \quad \text{............6.11}$$

entonces el trabajo neto realizado es cero:

$$W_{apli} + W_F = 0 \quad \text{............6.12}$$

0:

$$W_F = -W_{apli} \quad \text{............6.13}$$

Si determinamos cuál es el trabajo realizado por la fuerza aplicada conoceremos cuál es el trabajo realizado por el resorte.

En la figura 6.13 se indica como varia la fuerza aplicada con la deformación del resorte.
el área sombreada entonces nos dará el trabajo efectuado en estirar el resorte desde la posición x_i hasta x_f

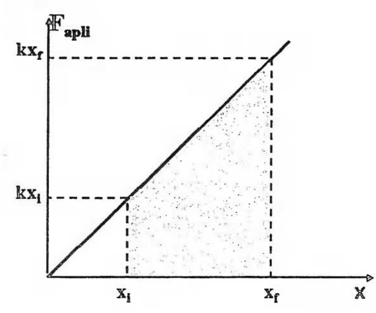


Fig. 6.13: Gráfica de la fuerza aplicada F_{apli} versus la posición, el área sombreada nos da el trabajo realizado por ella desde x_i hasta x_f

$$W_{apli} = \text{área del trapecio} = \left(\frac{kx_i + kx_f}{2}\right)(x_f - x_i)$$

$$W_{apli} = \frac{kx_f^2}{2} - \frac{kx_i^2}{2} \quad \text{............6.14}$$

y el trabajo realizado por el resorte será:

$$W = \frac{kx_i^2}{2} - \frac{kx_f^2}{2} \quad \text{............6.15}$$

6.4 Teorema del trabajo y la energía cinética

Consideremos una partícula de masa m moviéndose en la dirección del eje x por acción de la fuerza resultante F_x , por sencillez supondremos que esta fuerza es constante tal como se indica en la figura 6.14

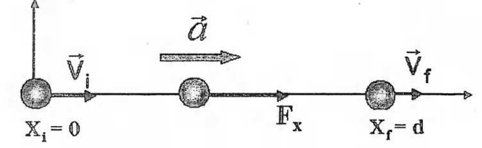


Fig. 6.14: Una partícula de masa m moviéndose por acción de una fuerza constante F_x, describe un movimiento rectilíneo uniforme

¿Cuál será entonces el trabajo realizado por la fuerza resultante?
Como la fuerza resultante es constante el trabajo será simplemente:

$$W = F_x d \quad ....6.16$$

Por la segunda ley de newton se puede establecer que:

$$F_x = ma \quad ....6.17$$

además como la aceleración también es constante, por cinemática:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2ad$$

de aquí obtenemos:

$$F_x = \frac{m}{d}\left(\frac{v_f^2}{2} - \frac{v_i^2}{2}\right) \quad ....6.18$$

Sí reemplazamos esta expresión en la ecuación 6.16 obtendremos:

$$W = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2} \quad ....6.19$$

Vemos pues que para calcular el trabajo no es necesario conocer la fuerza resultante F, solo es necesario saber cual es la velocidad inicial y final de la partícula.
Al semiproducto de la masa por el cuadrado de su rapidez se le define como la energía cinética de la partícula.

Es decir **la energía cinética** E_k de una partícula de masa m y velocidad **v** se define como:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad ....6.20$$

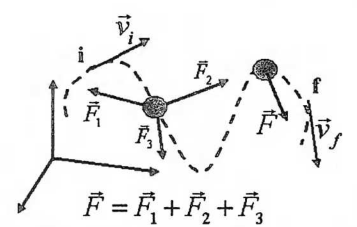
es la energía asociada a todo cuerpo en movimiento, la energía cinética es una cantidad escalar y tiene las mismas unidades que el trabajo (Joules)

la definición de energía nos permite expresar el trabajo de la fuerza resultante como:

$$W = (E_k)_f - (E_k)_i = \Delta E_k \quad ....6.21$$

entonces **el trabajo realizado por la fuerza resultante es igual al cambio en la energía cinética de la partícula, a esta importante relación se le conoce como el teorema del trabajo y la energía cinética**

Aún cuando este importante teorema llamado "teorema del trabajo y la energía cinética" ha sido demostrado suponiendo una fuerza constante en magnitud y dirección, es valido aun si F fuera variable



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

Fig. 6.15: el teorema del trabajo y la energía cinética es valido aun cuando la fuerza no sea constante

En general si sobre una partícula actúan varias fuerzas, siendo $\vec{F}$ la fuerza resultante, tal como se indica en la figura 6.15, entonces **el trabajo realizado por la fuerza desde la posición inicial a hasta la posición final es igual al cambio en la energía cinética de la partícula**

6.5 Energía potencial y conservación de la energía

En el capitulo 6.2 se introdujo el concepto de energía cinética, el cual esta asociado con el movimiento de un objeto. Se encontró que la energía cinética de un objeto puede cambiar únicamente si se realiza trabajo sobre él, Ahora introduciremos otra forma de energía mecánica, llamada energía potencial, la cual esta asociada con la posición o la configuración de un objeto.

Se descubrirá que la energía potencial de un sistema se puede pensar como una energía almacenada en él y que puede convertirse en energía cinética. El concepto de energía potencial solo se puede aplicar cuando se esta tratando con una clase especial de fuerzas llamadas "fuerzas conservativas". Si solo actúan fuerzas conservativas sobre un sistema, como las de gravitación o de un resorte, la energía cinética ganada (o perdida)por el sistema, cuando en sus elementos hay cambios de posiciones relativas se compensa por una energía igual perdida (o ganada) en la forma de energía potencial. Esto se conoce como la ley de Conservación de la energía mecánica. Una ley de la conservación de la energía mas general se aplica a un sistema aislado cuando se toman en cuenta todas las formas de energía y todas las transformaciones de la misma.

6.5.1Trabajo realizado por el peso:
Se desea mover un cuerpo de masa m desde la posición inicial A, hasta la posición final B a través de los caminos C_1 y C_2 tal como se indica. fig. 6.16

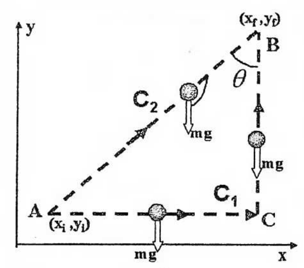


Fig. 6.16:
C1: m se desplaza de A hacia B primero horizontalmente y luego verticalmente
C2: m se desplaza de A hacia B a través de un camino recto

El trabajo realizado por el peso a través del camino $\mathbf{C_1}$ se puede hallar como el trabajo realizado a través de camino **AC** mas el trabajo realizado a través del camino **CB:**

$$W_{C_1} = W_{AC} + W_{CB} \text{ ....} \mathbf{6.22}$$

$W_{AC} = 0$ pues el peso es perpendicular al desplazamiento

$$W_{CB} = \vec{F}.\Delta\vec{y} = mg(y_f - y_i)\cos\pi$$

$$W_{CB} = -mg(y_f - y_i) \text{ ....} \mathbf{6.23}$$

el trabajo a través del camino $\mathbf{C_1}$ será:

$$W_{C_1} = -mg(y_f - y_i) \text{ ....} \mathbf{6.24}$$

Para hallar el trabajo realizado por el peso a través del camino $\mathbf{C_2}$ usamos la definición de trabajo realizado por una fuerza constante

$$W = \vec{F}.\Delta\vec{r} = F\,\Delta r\cos\theta \text{ ....} \mathbf{6.25}$$

en este caso F=mg Δr=AB

$$W_{C_2} = mg\,AB\cos(\pi - \theta) \quad \text{o}$$

$$W_{C_2} = -mg\,AB\cos\theta \text{ ....} \mathbf{6.26}$$

De la figura 6.16 podemos observar que $AB\cos\theta = y_f - y_i$
Y finalmente el trabajo realizado por el peso a través del camino $\mathbf{C_2}$

$$W_{C_2} = -mg(y_f - y_i) \text{ ....} \mathbf{6.27}$$

y llegamos a la conclusión que:

$$W_{C_1} = W_{C_2} \text{ ....} \mathbf{6.28}$$

El trabajo realizado por el peso a través del camino $\mathbf{C_1}$ **es igual al trabajo realizado por el peso a través del camino** $\mathbf{C_2}$.

El resultado hubiera sido el mismo si el camino escogido para ir de A hacia B fuera completamente arbitrario figura 6.17

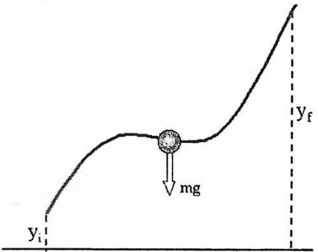


Fig. 6.17: El trabajo realizado por el peso entre dos puntos, es independiente del camino que une a dichos puntos

6.5.2 Energía potencial gravitatoria:

Se define la energía potencial gravitacional como:

$$E_p = mgy \quad \textbf{............6.29}$$

donde : m: es la masa del cuerpo,
g :la aceleración de la gravedad,
y :coordenada vertical medido desde un nivel de referencia.

La energía potencial es la energía que tiene todo cuerpo inmerso en el campo gravitatorio terrestre respecto de un nivel de referencia dado.

Así tenemos que:

- Si la masa se encuentra por encima del nivel de referencia su energía potencial será positiva
- Si la masa se encuentra en el mismo nivel de referencia su energía potencial es cero
- Si la masa se encuentra por debajo del nivel de referencia su energía potencial será negativa

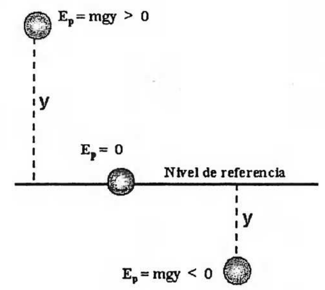


Fig. 6.18: La energía potencial gravitatoria depende del nivel de referencia tomado, y puede ser positivo, cero o negativo

Si reemplazamos la ecuación 6.29 en la ec 6.27, podemos expresar el trabajo realizado por el peso de la siguiente manera

$$W = (E_p)_i - (E_p)_f = -\Delta E_p \text{ ....} \mathbf{6.30}$$

Es decir el trabajo realizado por el peso es igual a menos el cambio de la energía potencial gravitatoria de la partícula

6.5.3Energía potencial elástica:

Cuando se calculó el trabajo realizado por un resorte se encontró que éste sólo dependía de la elongación inicial y final del resorte (ec. 6.15)

$$W = \frac{kx_i^2}{2} - \frac{kx_f^2}{2} \text{ ....} \mathbf{6.31}$$

P.E

x_i

x_f

si se define **la energía potencial elástica** como

$$E_{Pe} = \frac{kx^2}{2} \text{ ....} \mathbf{6.32}$$

entonces el trabajo realizado por el resorte se puede expresar según la ec 6.31 y 6.32:

$$W = (E_{Pe})_i - (E_{Pe})_f = -\Delta E_{Pe} \text{ ....} \mathbf{6.33}$$

es decir **el trabajo realizado por la fuerza elástica es igual a menos el cambio de la energía potencial elástica**

hemos visto pues que el trabajo, realizado por el peso o el trabajo realizado por la fuerza elástica se pueden escribir como:

$$W = -\Delta E_P \text{ ....} \mathbf{6.34}$$

esta coincidencia en la forma de representarlas no nos debe sorprender pues la fuerza gravitatoria (peso) así como la fuerza elástica (resorte) pertenecen a una clase especial de fuerzas llamadas **"fuerzas conservativas"**

6.6 Fuerzas conservativas:

Diremos que una fuerza es conservativa si satisface las siguientes condiciones:

- Si el trabajo efectuado por ella sobre una partícula entre dos puntos, es independiente de la trayectoria:

$$(W_C)_1 = (W_C)_2 = (W_C)_3 \text{ ....} \mathbf{6.35}$$

(W_C es el trabajo realizado por la fuerza conservativa)

- El trabajo solo depende de las posiciones inicial y final Fig. 6.19

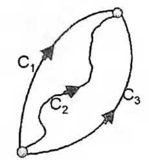


Fig. 6.19
El trabajo de la fuerza conservativa es independiente de la trayectoria, solo depende la posición inicial y final

- El trabajo efectuado por una fuerza conservativa a través de una trayectoria cerrada es 0. Fig. 6.20

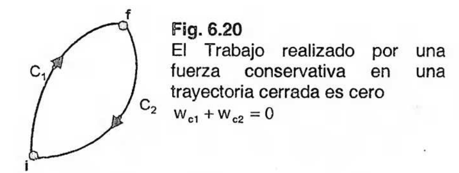


Fig. 6.20
El Trabajo realizado por una fuerza conservativa en una trayectoria cerrada es cero
$W_{c1} + W_{c2} = 0$

- Toda fuerza conservativa $\vec{F}_C$ tiene asociada a ella una función, llamada energía potencial E_P tal que el trabajo realizado por esta fuerza conservativa es igual a menos el cambio de su energía potencial

$$W_C = -\Delta E_P \quad \text{...........} \mathbf{6.36}$$

en la lista se pueden ver las fuerzas conservativas más comunes

fuerza	Forma	Energía potencial
Gravitatoria	mg	mgy
Elástica	-k x	$kx^2/2$
Eléctrica	q **E**	q v

Solo téngase en cuenta que en el caso de la fuerza eléctrica (capitulo que se verá mas adelante) q es la carga y V es el potencial electrostático

Si alguna fuerza no cumple con las características mencionadas anteriormente diremos que es una fuerza no conservativa, como por ejemplo la fuerza de fricción o rozamiento

6.7 La energía mecánica

6.71 Principio de su conservación

Supóngase que sobre una partícula de masa m actúan varias fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ no conservativas y una fuerza conservativa $\vec{F}_C$, ver figura 6.21

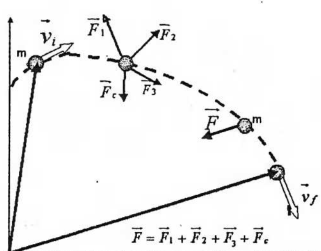


Fig. 6.21: movimiento de una partícula de masa m por acción de las fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ y una fuerza conservativa $\vec{F}_c$

El trabajo realizado por la fuerza resultante es igual a la suma de los trabajos efectuados por cada una de las fuerzas individuales:

$$W = w_{F_1} + w_{F_2} + w_{F_2} + w_C \text{ ....} \mathbf{6.37}$$

si llamamos W_{NC} al trabajo realizado por todas las fuerzas no conservativas

$$W_{NC} = w_{F_1} + w_{F_2} + w_{F_2} \text{ ....} \mathbf{6.38}$$

entonces el trabajo de la fuerza resultante se puede expresar:

$$W = W_{NC} + w_C \text{ ....} \mathbf{6.39}$$

Ahora:

- Por el teorema del trabajo - energía cinética ec 6.21, podemos decir;

$$W = \Delta E_k$$

- como F_c es conservativa el trabajo realizado será, según la ecuación 6.30:

$$w_C = -\Delta E_P$$

reemplazando la ecs 6.21 y 6.30 en la ec 6.39 obtenemos:

$$\Delta E_C = W_{NC} - \Delta E_p \text{ o}$$

$$\Delta(E_C + E_p) = W_{NC} \text{ o}$$

$$(E_C + E_p)_F - (E_C + E_p)_i = W_{NC} \text{ ....} \mathbf{6.40}$$

si definimos la **energía mecánica del sistema** como:

$$E = E_C + E_p \text{ ....} \mathbf{6.41}$$

entonces:

$$\Delta E = W_{NC} \text{ ....} \mathbf{6.42}$$

El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es igual al cambio de la energía mecánica del sistema

¿Que sucede si solo actúan fuerzas conservativas?
En este caso

$$W_{NC} = 0$$

y

$$E = E_C + E_P = cte \text{ ....6.43}$$

esta importante relación nos indica que en todo momento la energía cinética y potencial del sistema se mantiene constante y recibe el nombre de:

del principio de conservación de la energía mecánica del sistema

ejemplo:
una pelotita de masa m= 2 Kg se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez **V=20 m/s** utilice el principio de conservación de la energía para describir el movimiento de la pelotita (desprecie la fuerza de rozamiento con el aire)

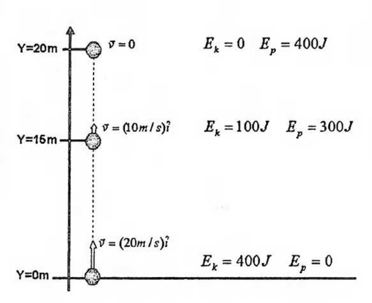


Fig. 6.22: en ausencia de fricción la energía mecánica se mantiene constante, obsérvese, que mientras sube la pelotita la energía cinética disminuye mientras que su energía potencial aumenta de tal manera que la suma en cualquier punto de la trayectoria se mantiene en 400J

Solución :
El principio de conservación establece que la suma de la energía cinética y potencial se mantiene constante en todo momento, en nuestro caso 400J
Si asumimos que el lugar desde donde se lanzó es el nivel de referencia entonces en ese momento la energía es puramente cinética

$$E = E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 400J$$

Mientras la pelotita va subiendo su energía cinética empieza a disminuir pero al mismo tiempo su energía potencial se incrementa de tal manera que la suma es siempre 400J, en el punto más alto de su trayectoria la energía cinética es cero y la energía potencial toma su máximo valor posible. Durante la caída ocurre todo lo contrario
Podemos apreciar que **hay una transformación de energía cinética en energía potencial y de energía potencial en energía cinética durante todo el movimiento.**

6.8 Potencia

Se define como el trabajo efectuado en la unidad de tiempo o la rapidez con la cual se efectúa el trabajo

6.8.1 Potencia media:

Es el trabajo total efectuado entre el tiempo total empleado

$$P = \frac{\text{trabajo total}}{\text{tiempo}} \quad \text{............6.44}$$

$$\frac{\text{joule}}{\text{segundo}} = \text{watt} \;,\; [\frac{J}{s} = W]$$

6.8.2 Potencia instantánea:

Determinemos el trabajo ΔW realizado por una fuerza F en un intervalo de tiempo muy pequeño Δt:

$$P = \frac{\Delta w}{\Delta t} \quad \text{............6.45}$$

si el intervalo de tiempo lo hacemos tender a cero obtendremos entonces la potencia instantánea

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Como en ese pequeño intervalo de tiempo el bloque se logra desplazar **Δr, el** trabajo realizado será:

$$\Delta W = \vec{F} \bullet \Delta \vec{r}$$

esto nos permite expresar la potencia instantánea de la siguiente manera:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F} \bullet \Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Ordenando adecuadamente:

$$P = \vec{F} \bullet \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

el segundo termino de esta ultima expresión es justamente la velocidad instantánea

$$P = \vec{F} \bullet \vec{v} \quad \text{...........6.46}$$

es decir:

La potencia instantánea desarrollada por una fuerza F es igual al producto de la fuerza por la velocidad instantánea

otra unidad de energía:

$$1\text{Kwh} = 3{,}6\ 10^{6}\text{J}$$

otra unidad de potencia

$$1\text{HP} = 746\text{w}$$

Ejemplo:

Un elevador tiene una masa de 1000kg. y eleva una carga de 800kg. Una fuerza de rozamiento constante de 4000N retarda su movimiento hacia arriba

a) ¿Cuál debe ser la potencia mínima que debe entregar el motor para levantar el elevador con una rapidez constante de 3m/s?

b) ¿Que potencia debe entregar el motor en cualquier instante para proporcionar una aceleración hacia arriba de $1 m/s^2$ si parte del reposo?

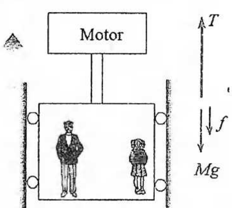
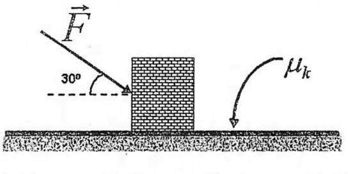


Fig. 6.23: el DCL del ascensor nos indica que sobre ella actúan, la tensión del cable T, la fricción f y el peso total Mg

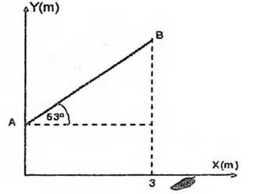
PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Un bloque de 50 Kg. descansa en una superficie rugosa (μ_k = 0,5). Si una fuerza de 600 N se aplica al bloque, tal como se muestra en la figura, calcule el trabajo (en kJ) efectuado por la fuerza durante 10 s



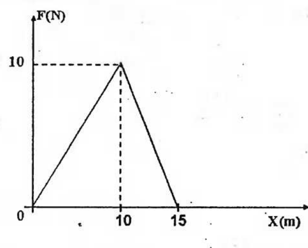
A) 24 B) 34 C) 44 D) 54 E) 64

2 Si el punto de aplicación de una fuerza F=(-3 i + 4 j)N se desplaza de A hacia B, halle el trabajo (en J) de F a lo largo de AB.



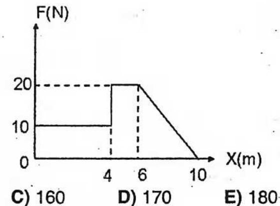
A) 7 B) 16 C) 20 D) 24 E) 25

3 Sobre un cuerpo se aplica una fuerza según el eje x, como se indica en la figura. ¿Cuál es el trabajo (en J) realizado por esta fuerza para llevar al bloque desde x=12m hasta x=10m?



A) –15 **B)** -16 **C)** –17 **D)** –18 **E)** -19

4 Una fuerza resultante **F** actúa sobre un cuerpo de masa m en la dirección y sentido de su velocidad. Sabiendo que la magnitud de **F** varía con la posición x del cuerpo de acuerdo al gráfico mostrado, ¿Cuál será la energía cinética (en J) del cuerpo al llegar a la posición x =10m, si en x =0m tenía una energía cinética de 20 J?.

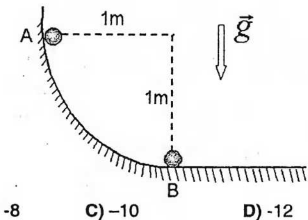


A) 140 **B)** 150 **C)** 160 **D)** 170 **E)** 180

5 Un cuerpo cuyo peso es de 200N es lanzado con una rapidez de 50m/s verticalmente hacia arriba. Despreciando todo rozamiento, determine la altura (en m) en donde su energía cinética es el 50% de lo que inicialmente tenía(Considere g =10 m/s^2)

A) 60.5 **B)** 61.5 **C)** 62.5 **D)** 163.5 **E)** 64.5

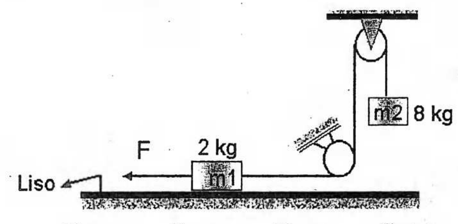
6 Una partícula de 1kg. se deja en libertad en el punto A. Si la parte entre A y B es lisa y de forma circular de 1m de radio, hallar el trabajo de la fuerza de fricción (en J) desde el punto B hasta que se detiene.



A) –6 **B)** -8 **C)** –10 **D)** -12 **E)** -14

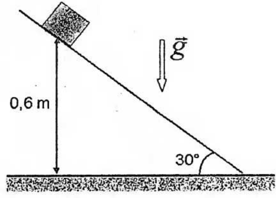
7 Sobre una masa de 1 Kg. inicialmente en reposo se aplica una fuerza $\mathbf{F} = F\,\mathbf{j}$ de manera que la masa asciende verticalmente con una aceleración $\mathbf{a} = 2\,\mathbf{j}$ m/s^2, desplazándose 4m. Halle la potencia (en W) desarrollada por F.
A) 20 **B)** 21 **C)** 22 **D)** 23 **E)** 24

8 El bloque de 2 kg y el bloque de 8 kg ,se encuentran conectados mediante una cuerda inextensible. Despreciando todo tipo de fricción, calcule el trabajo (en kJ) que realiza la fuerza F, horizontal, de 75N, durante los 8 s de movimiento de m_2.



A) -0.8 **B)** -1,0 **C)** -1,2 **D)** -1,4 **E)** -1,6

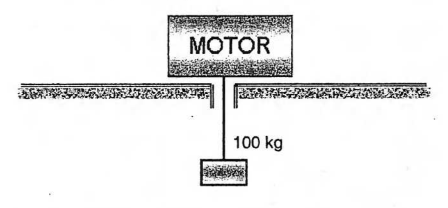
9 Un bloque de 3 kg empieza a moverse sobre el plano inclinado desde la posición mostrada en la figura. ¿Qué distancia (en m) se desliza el bloque sobre la superficie horizontal antes de detenerse? Asuma que el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano, y la superficie horizontal, es 0,2.



A) 1,80 **B)**1,90 **C)** 1,95 **D)** 2,05 **E)** 2,10

10 Un bloque de 80 Kg se desplaza horizontalmente con una rapidez constante de 100 m/s sobre una superficie rugosa (μ_k = 0,8) por acción de una fuerza horizontal **F**. Determine la potencia (en kW) desarrollada por la fuerza.
A) 60 **B)** 62 **C)** 64 **D)** 66 **E)** 68

11 Si sólo el 40% de la potencia de un motor fuera aprovechable, dicho motor eleva el bloque (m = 100 kg) de la figura con una velocidad de 0,5 m./s. ¿Cuál es la potencia nominal (en kW) que indica la etiqueta del motor?



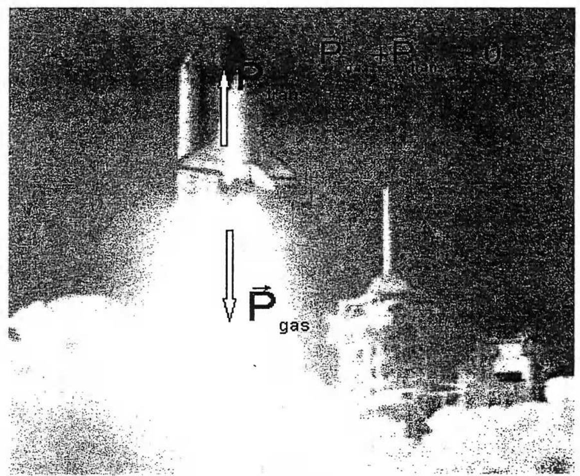
A)1,10 **B)** 1,15 **C)** 1,20 **D)** 1,25 **E)**1,30

Capítulo 7

Cantidad de Movimiento e Impulso

INTRODUCCIÓN

De acuerdo a la primera ley de Newton sabemos que si sobre una partícula nc actúan fuerzas entonces su velocidad en los sistemas inerciales



permanece invariable; y si consideramos partículas en interacción mutua, sus velocidades varían con el tiempo. No obstante, las variaciones de las velocidades de las partículas que interactúan no son independientes entre sí. Para aclarar cómo es esta dependencia definiremos el concepto de sistema aislado, comprendiendo con ello el conjunto de partículas que interactúan entre sí. Para el sistema aislado existen una serie de magnitudes relacionadas con las velocidades y que no varían con el tiempo (por ejemplo mas adelante hablaremos de la cantidad de movimiento del sistema). Estas magnitudes desempeñan un papel muy importante en la mecánica. Este nuevo enfoque (vectorial) representa un complemento de la

descripción energética (escalar), vista en el capítulo anterior, para el estudio de los problemas mecánicos. Gracias a esta nueva descripción se ha podido descubrir la existencia del núcleo del átomo, estudiar la formación de las diferentes etapas geológicas de la tierra, enviar una nave espacial a la Luna, además de entender problemas sencillos como el patear un balón, etc.

7.1 Cantidad de movimiento

Cuando se estudió la primera ley de Newton se estableció: que toda partícula que se mueve con velocidad constante o permanece en reposo en algún sistema de referencia inercial, permanecerá en dicho estado indefinidamente a menos que un agente externo le modifique su estado de movimiento. Esto es, si el sistema está aislado:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{v} = cte \\ \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Bajo estas condiciones si a la velocidad la multiplicamos por su masa (la cual se considera constante en todo momento) se tiene:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\vec{v} = cte \\ m\vec{v} = 0(reposo) \end{cases} \quad \text{............7.01}$$

Se puede entonces decir que en todo sistema aislado el producto de la masa por su velocidad se mantiene constante,

A la cantidad

$$\vec{p} = m\vec{v} : [\text{Kg ms}^{-1}] \text{ ....7.02}$$

se le define como la:

cantidad de movimiento o momentum lineal de la partícula de masa m

podemos redefinir la primera ley de Newton de la siguiente manera:

Toda partícula que se mueve con p constante o permanezca en reposo con p = 0, se mantendrá en dicho estado en forma indefinida a menos que algún agente externo le modifique su estado inicial

Téngase en cuenta que no se ha hecho nada nuevo solo se ha reinterpretado la 1ra ley de newton

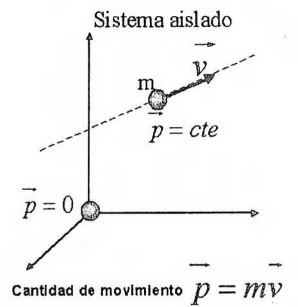
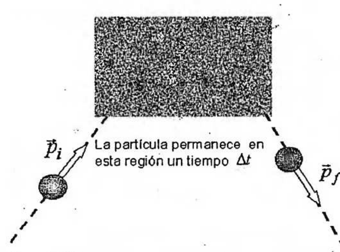


Fig. 7.01: toda partícula aislada tiene una cantidad de movimiento constante (o cero) respecto a un sistema de referencia

De esto podemos afirmar

si $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cte$ 7.03

Es decir, si la suma de fuerzas sobre una partícula es igual cero entonces su cantidad de movimiento se mantiene constante " **conservación de la cantidad de movimiento de una partícula**"



Analicemos ahora la siguiente situación:

supóngase que una partícula moviéndose con cantidad de movimiento $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$, ingresa a una región del espacio y después de un tiempo Δt sale de esta región con una cantidad de movimiento $\vec{p}_f = m\vec{v}_f$, ver figura 7.02

Fig. 7.02: la partícula ingresa a una región del espacio donde una fuerza, la cual se desconoce, le ha cambiado su cantidad de movimiento inicial

Hemos mencionado que solo las fuerzas son capaces de cambiar la cantidad de movimiento de una partícula, por lo tanto podemos afirmar que una fuerza a actuado sobre m durante el tiempo que permaneció en esa región del espacio. ¿Podremos determinar la fuerza?

La respuesta es no, no sabemos nada acerca de la fuerza que ha actuado sobre m ni como varia esta con el tiempo o con la posición, pero podemos tratar de determinar cual es la fuerza promedio que ha actuado sobre m

Como conocemos la velocidad inicial y final podemos determinar la aceleración media, usando nuestros conocimientos de cinemática tenemos

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t}$$

y

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{p}_i}{m} \quad \text{y} \quad \vec{v}_f = \frac{\vec{p}_f}{m}$$

entonces la aceleración media se puede expresar:

$$\vec{a} = \frac{\frac{\vec{p}_f}{m} - \frac{\vec{p}_i}{m}}{\Delta t} \quad \text{o} \quad \vec{a} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{m\Delta t}$$

de esta ultima expresión:

$$m\vec{a} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{\Delta t} \text{ ....7.04}$$

pero $m\vec{a}$ es la fuerza media o promedio que a actuado sobre m, entonces

$$\vec{F}_p = m\vec{a} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \text{ ....7.05}$$

podemos reinterpretar la segunda ley de newton diciendo:
que **el cambio en la cantidad de movimiento de una partícula con el tiempo es igual a la fuerza promedio que ha actuado sobre la partícula en el intervalo de tiempo Δt**

7.2 Impulso

7.2.1 Impulso de una fuerza constante:

Supongamos que una fuerza F constante actúa sobre la masita m durante un intervalo de tiempo Δt, tal como se indica en la figura 7.03

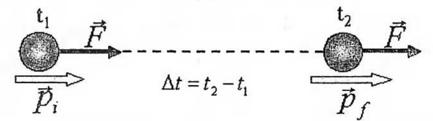


Fig. 7.03: una fuerza constante $\vec{F}$ actuando sobre una masita m durante un tiempo Δt, le cambia su cantidad de movimiento

Se define el impulso de la fuerza F como el producto de la fuerza por el intervalo de tiempo de interacción:

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t : [Ns] \text{..........} 7.06$$

Obsérvese que al actuar la fuerza F sobre m le cambia su cantidad de movimiento de $\vec{p}_i$ hasta $\vec{p}_f$ y como $\vec{F} = \dfrac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{\Delta t} = \dfrac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$ podemos entonces expresar el impulso como:

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t = \Delta \vec{p} \text{..........} 7.07$$

Es decir **el impulso de la fuerza F es igual al cambio de la cantidad de movimiento de la partícula.**
Esta ultima relación recibe el nombre " teorema del impulso y la cantidad de movimiento" y nos permite obtener el impulso que recibe la masita m sin necesidad de conocer la fuerza F

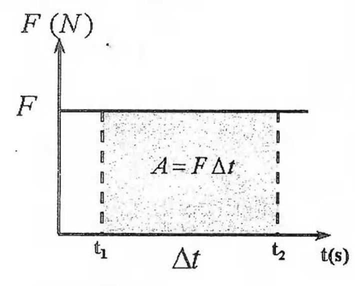


Fig. 7.04: Gráfica F versus t

sí graficamos la fuerza con el tiempo, figura 7.04:
podemos observar que el área bajo la curva nos proporciona la magnitud del impulso de la fuerza F

$$I = A = F\Delta t \text{..........} 7.08$$

aun cuando esto se ha obtenido asumiendo una fuerza constante en el tiempo es válido si F varía con el tiempo t en general si una fuerza F varia con el tiempo tal como se indica en la figura 7.05

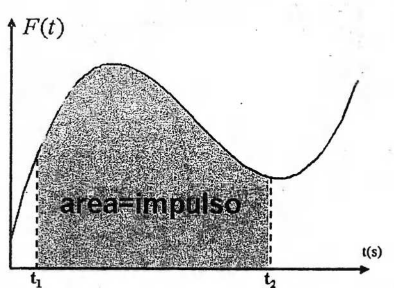


Fig. 7.05: el área encerrada en la gráfica F versus t nos da el valor del impulso recibido

la magnitud del impulso recibido por la partícula en el intervalo de tiempo Δt es igual al área bajo la curva de la gráfica F versus t

$$\vec{I} = \vec{F}_p \, \Delta t \quad \text{..........7.09}$$

en esta ultima ecuación debe tenerse cuidado pues la fuerza F_p que aparece es la fuerza promedio que ha actuado sobre la partícula en el intervalo **Δt**

7.2.2 Fuerzas impulsivas:

Son aquellas fuerzas que actúan durante un intervalo de tiempo muy pequeño($\approx 10^{-4} s$) y que en promedio son muy grandes

Ejemplo :

Una pelotita de 0.5 kg se lanza horizontalmente contra una pared con una rapidez de 40 m/s, figura 7.06, si esta rebota con la misma rapidez, determine la fuerza promedio que la pared ejerce sobre la pelotita. El tiempo de interacción pared-pelota es aproximadamente 10^{-3} s

$\vec{p}_f = (20Ns)\hat{i}$

$\Delta t = 10^{-3} s$

$\vec{p}_i = -(20Ns)\hat{i}$

Fig. 7.06: Cantidad de movimiento de la pelotita antes y después de chocar con la pared

Solución:

Determinemos la cantidad de movimiento de la pelotita $\vec{p} = m\vec{v}$

Antes de chocar con la pared:

$\vec{p}_i = (0.5 \text{ kg})(-40 \text{ m/s } \hat{i}) = -(20 \text{ Ns})\hat{i}$

después de rebotar en la pared

$\vec{p}_f = (0.5 \text{ kg})(40 \text{ m/s } \hat{i}) = (20 \text{ Ns})\hat{i}$

El cambio en la cantidad de movimiento será

$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = (40\ \text{Ns})\hat{i}$

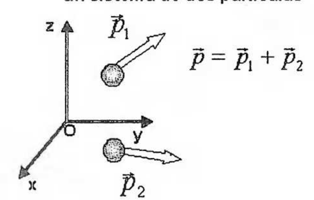
la fuerza promedio que actuó sobre la pelotita es, según la ec 7.05:

$$\vec{F}_p = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{(40\,\text{Ns})\hat{i}}{10^{-3}\text{s}} = (40000\ \text{N})\hat{i}$$

Durante la colisión no solo a actuado la fuerza de la pared sobre m, también lo ha hecho el peso, pero si comparamos el peso con la fuerza impulsiva F_p notaremos que esta solo representa el 0.0125% de F_p, por lo cual no ha sido considerado en el calculo.

En buena aproximación podemos entonces decir que durante el tiempo que actúa una fuerza impulsiva el peso puede ser despreciado

7.3 Cantidad de movimiento de un sistema de dos partículas:



Dado un sistema de dos partículas, fig. 7.07, se define la cantidad de movimiento del sistema como la suma de la cantidad de movimiento de cada una ellas

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \text{...........7.10}$$

Fig. 7.07: sistema aislado de dos partículas

7.4 Conservación de la cantidad de movimiento de un sistema de dos partículas

Supongamos un sistema de dos partículas sujetas a su interacción mutua $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$ y a las fuerzas externas $\vec{F}_{ext,1}$ y $\vec{F}_{ext,2}$ tal como se indica en la figura 7.08:

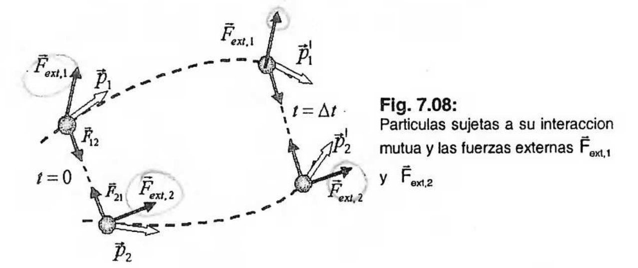


Fig. 7.08: Particulas sujetas a su interaccion mutua y las fuerzas externas $\vec{F}_{ext,1}$ y $\vec{F}_{ext,2}$

Observamos que la cantidad de movimiento de cada partícula no es constante debido a las fuerzas que actúan sobre ellas, entonces nos preguntamos ¿la cantidad de movimiento del sistema se mantendrá constante?
Para contestar esta pregunta analicemos cada partícula por separado:
$\vec{p}_1$ no es constante pues sobre m_1 actúa la fuerza $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{ext,1}$ aplicando la segunda ley de newton ec 7.05 tenemos:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{ext,1} = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t}$$

análogamente podemos decir que $\vec{p}_2$ no es constante pues sobre m_2 actúan las fuerza $\vec{F}_{21}$ y $\vec{F}_{ext,2}$

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{ext,2} = \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$$

si sumamos estas dos ecuaciones y ordenamos adecuadamente:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{ext,1} + \vec{F}_{ext,2} = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$$

o

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{ext,1} + \vec{F}_{ext,2} = \frac{\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{\Delta t} \text{ ....7.11}$$

por la tercera ley de Newton (ley de acción y reacción):

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

entonces :

$$\vec{F}_{ext,1} + \vec{F}_{ext,2} = \frac{\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{\Delta t}$$

ó

$$\vec{F}_{Ext} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \text{ ....7.12}$$

donde $\vec{F}_{Ext}$ es la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema

$$\vec{F}_{Ext} = \vec{F}_{ext,1} + \vec{F}_{ext,2} \text{ ....7.13}$$

Es decir el cambio en la cantidad de movimiento del sistema con el tiempo es igual a la fuerza resultante externa que actúa sobre el sistema

Ahora si la fuerza resultante externa es cero

$$\vec{F}_{Ext} = \vec{F}_{ext,1} + \vec{F}_{ext,2} = 0$$

entonces tendremos:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = 0 \text{ ....7.14}$$

esto significa que el cambio en la cantidad de movimiento del sistema en el intervalo de tiempo Δt es cero:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cte \text{ ....7.15}$$

si la fuerza externa que actúa sobre el sistema es cero entonces su cantidad de movimiento se mantiene constante en todo momento

Resumiendo:

Sí $\vec{F}_{Ext} = \vec{F}_{ext,1} + \vec{F}_{ext,2} = 0$ entonces $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cte$

Esta recibe el nombre del **principio de conservación de la cantidad de movimiento del sistema** y podemos generalizarla a un sistema conformado por varias partículas:

Dado un sistema de n partículas se define la cantidad de movimiento del sistema como:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots\dots + \vec{p}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \quad \text{..........7.16}$$

a) Si sobre el sistema actúan varias fuerzas externas se cumple que:

$\vec{F}_{Ext} = \dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ ....**7.17** donde $\vec{F}_{Ext} = \sum_j \vec{F}_j$ ....**7.18** es la suma de todas las fuerzas externas al sistema y $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$

b) Si la fuerza resultante externa que actúa sobre el sistema es cero el principio de conservación de la cantidad de movimiento establece que:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \overline{cte} \quad \text{..........7.19}$$

es importante notar que las **fuerzas internas no cambian la cantidad de movimiento del sistema de partículas**

7.5 Centro de masa

Cuando se estudio en cinemática el movimiento bidimensional se vio que todo cuerpo lanzado al aire, bajo la influencia de la gravedad, describiría una trayectoria parabólica y tomamos como ejemplo un proyectil, una pelota, etc. Pero todos ellos fueron tratados como partículas puntuales sin dimensiones, pero la realidad es que todos estos cuerpos están conformados por muchas partículas. Por ejemplo si lanzamos una mancuerna al aire, figura 7.09

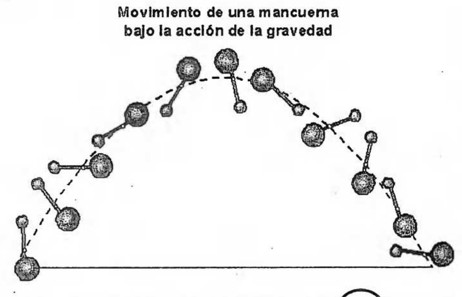


Fig. 7.09: El centro de masa de la mancuerna lanzada al aire describe una trayectoria parabólica

un observador que se encuentra lejos verá que ésta efectivamente describe una trayectoria parabólica, pero qué verá el observador si se acerca más y ve detalladamente lo que sucede

El observador dirá que cada masa en forma individual no describe una trayectoria parabólica, sino que están girando y moviéndose caprichosamente, pero sin embargo el punto marcado en la mancuerna si describe una parábola, este punto particular del sistema recibe el nombre de **Centro de masa (CM)** y se comporta como una partícula puntual de masa M+m
ver figura 7.10

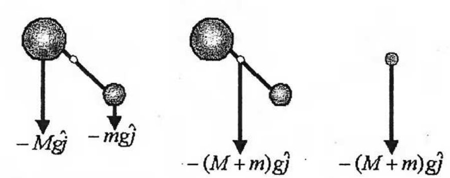


Fig. 7.10: El centro de masa de la mancuerna se comporta como una partícula puntual de masa M+m

7.5.1 Ubicación del centro de masa:

Si se tiene un sistema de partículas la ubicación de su centro de masa esta dado por:

Ubicación del Centro de masa de un sistema de varias partículas

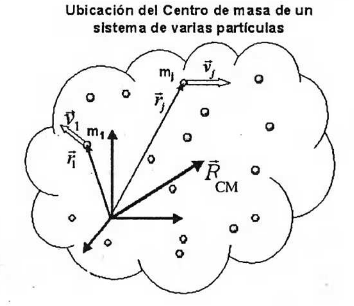


Fig. 7.11: sistema de varias partículas, su centro de masa se denota por $\vec{R}_{CM}$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots\ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7.20$$

como $\sum_{i=1}^{n} m_i$ es la masa total M del sistema esta ecuación se convierte:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7.21$$

donde $\vec{r}_i$ es el vector posición de la masa m_i

7.5.2 Velocidad del centro de masa:

El movimiento de cada una de las partículas del sistema nos advierte que el centro de masa de la misma deberá estar moviéndose también, si analizamos una de ellas, digamos la j-esima partícula, en un tiempo Δt ésta deberá haberse desplazado, $\Delta\vec{r}_j$, entonces el desplazamiento del CM en ese mismo intervalo de tiempo será:

$$\Delta\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\vec{r}_i}{M}$$

si dividimos esta expresión por Δt y hacemos que este intervalo de tiempo sea lo mas pequeño posible ($\Delta t \to 0$) obtendremos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{R}_{CM}}{\Delta t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t}}{M}$$

esta es justamente la velocidad instantánea, entonces la velocidad del centro de masa $\vec{V}_{CM}$ queda determinada por:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7.22$$

$\vec{v}_i$ es la velocidad instantánea de la i-esima partícula

la sumatoria que aparece en esta ultima expresión, según la ec 7.16, es la cantidad de movimiento $\vec{p}$ del sistema de partículas

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

por lo tanto:

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\vec{p}}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7.23$$

Es decir **la velocidad del centro de masa es igual a la cantidad de movimiento del sistema de partículas entre la masa total del sistema**

Esto nos permite expresar la cantidad de movimiento del sistema como:

$$\vec{p} = M\vec{V}_{CM} \quad ....7.24$$

por el principio de conservación de la cantidad de movimiento, si la fuerza resultante externa es cero entonces la cantidad de movimiento de sistema se mantiene constante por lo tanto $\vec{V}_{CM}$ deberá también permanecer constante, como si se tratase de una partícula de masa M, esto confirma una vez mas pues que el centro de masa se comporta como una partícula puntual de masa M y velocidad $\vec{V}_{CM}$

7.5.3 Aceleración del centro de masa:

Si sobre el sistema de partículas actúan varias fuerzas externas, hemos demostrado antes que: $\vec{F}_{Ext} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ donde $\vec{F}_{Ext} = \sum_j \vec{F}_j$ es la suma de todas las fuerzas externas al sistema y $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = M\vec{V}_{CM}$

Combinando estas ecuaciones

$$\vec{F}_{Ext} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(M\vec{V}_{CM})}{\Delta t} = M\frac{\Delta\vec{V}_{CM}}{\Delta t}$$

finalmente obtenemos:

$$\vec{F}_{Ext} = M\vec{a}_{CM} \quad ....7.25$$

es decir la aceleración del centro de masa es igual a la fuerza resultante externa que actúa sobre el sistema entre la masa M del sistema de partículas

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}_{Ext}}{M} \quad ....7.26^{a}$$

o equivalentemente:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M} \quad ....7.26b$$

7.6 Colisiones elásticas e inelásticas en una dimensión

$\sum F = 0$ $P_0 = P_f$

Supóngase que dos masas m_1 y m_2 colisionan frontalmente, ver figura 7.12, durante la colisión aparece, por la tercera ley de newton, la fuerza de interacción entre ellas, las cuales son iguales y opuestas, estas fuerzas como ya se menciono antes no cambia la cantidad de movimiento de las masas

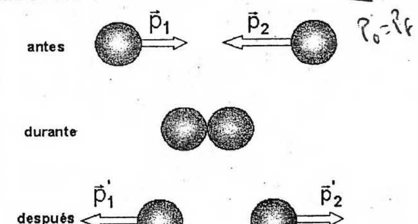


Fig. 7.12 Durante la colisión la fuerza de interacción no cambia la cantidad de movimiento Del sistema de las partículas.

Existen tres tipos de colisiones:

I) **Colisión elástica:** en este tipo de colisión la energía de las partículas inmediatamente antes y después de la colisión permanece constante

II) **Colisión inelástica:** en este tipo de colisión la energía de las partículas no se mantiene constante, parte de ella se pierde en forma de calor y en la deformación que sufren los cuerpos durante el choque figura 7.13

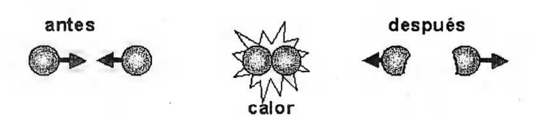


Fig. 7.13: Durante una colisión inelástica, parte de la energía cinética de las masitas se convierte en calor

III) **Colisión completamente inelástica:** es considerada también una colisión inelástica pero en este caso los cuerpos permanecen unidos después del choque, figura 7.14

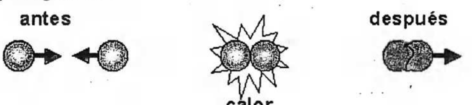


Fig. 7.14: Representación de una colisión completamente inelástica entre dos masitas

7.6.1 Colisión elástica en una dimensión:

Supongamos dos partículas moviéndose en la misma dirección tal como se indica en la figura 7.15



Fig. 7.15: En la figura se indican las velocidades de las masitas inmediatamente antes y después de la colisión elástica

Si conocemos sus velocidades antes de la colisión ¿cuáles serán sus velocidades inmediatamente después del choque?

Por ser una colisión elástica su energía se debe conservar, por lo tanto:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

de aquí se obtiene

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_1(v_2'^2 - v_2^2) \text{ ....7.27}$$

por conservación de la cantidad de movimiento

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \text{ ....7.28}$$

como están en la misma dirección podemos eliminar el vector unitario $\hat{i}$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \text{ ....7.29}$$

de aquí:

$$m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2) \text{ ....7.30}$$

dividiendo la ecuación 7.27 por la ec 7.30:

$$v_1 - v_2 = v'_2 - v'_1 \text{ ....7.31}$$

o:

$$v_1 - v_2 = -(v'_1 - v'_2) \text{ ....7.32}$$

la cual nos indica que la velocidad relativa de acercamiento es igual y opuesta a la velocidad relativa de alejamiento

Resolviendo las ecuaciones 7.29 y 7.31 obtenemos las velocidades después de la colisión:

$$v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} v_1 + \frac{2m_2}{(m_1 + m_2)} v_2 \text{ ....7.33}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_1 + \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} v_2 \text{ ....7.34}$$

7.6.2 Coeficiente de restitución:

Retomemos nuevamente la ecuación 7.32:

$$v_1 - v_2 = -(v'_1 - v'_2)$$

y analicemos la siguiente situación:

Supongamos dos partículas moviéndose una al encuentro de la otra con velocidades de 10 m/s y 30 m/s tal como se indica en la figura 7.16

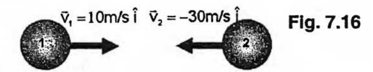


Fig. 7.16

Si fijamos un observador en la partícula 1
¿Qué verá este observador antes y después de la colisión?
El observador en todo momento asumirá que la partícula 1 no se mueve respecto de él y que la partícula 2 se le aproxima con una rapidez de 40 m/s (ver figura 7.17)

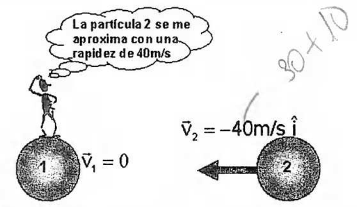


fig.7.17 velocidad de las partículas vistas por un observador fijo en la partícula 1

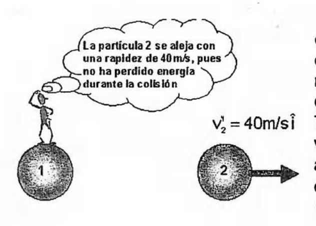


Fig. 7.18: velocidad de alejamiento de la partícula 2 vista por el observador fijo en 1

además como la colisión es elástica, el observador con seguridad dirá que la energía cinética de la partícula 2 será la misma antes y después de la colisión es decir su velocidad no cambia, ver figura 7.18, él entonces puede afirmar que la velocidad de acercamiento y la velocidad de alejamiento de la partícula 2 son iguales y opuesta, es decir:

$$\vec{V}_{acercamiento} = -\vec{V}_{alejamiento}$$

Ahora ¿qué vera el observador si la colisión es inelástica?
En este caso el observador vera que debido a la colisión se ha liberado calor y se ha producido una deformación en ambas partículas, tal como se indica en la figura 7.19

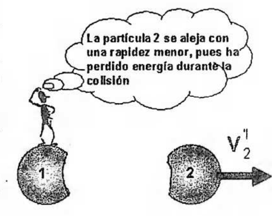


Fig. 7.19: la rapidez de alejamiento de la partícula 2 medida por el observador es menor que la de acercamiento

En este caso el observador puede afirmar que la rapidez de acercamiento es mayor que la rapidez de alejamiento, es decir:

$$V_{acercamiento} > V_{alejamiento}$$

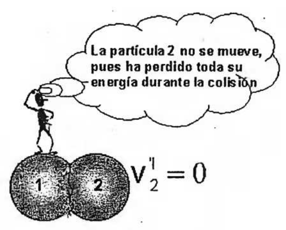


Fig. 7.20: en una colisión completamente inelástica, para el observador ligado a la partícula 1, la partícula 2 no se mueve

Por ultimo ¿qué vera el observador si la colisión fuera completamente inelástica?

En este caso el observador vera que la partícula 2 queda unida a la partícula 1 y ha perdido toda su energía como consecuencia de la colisión completamente inelástica, es decir:

$$V_{alejamiento} = 0$$

ver figura 7.20

Tengamos en cuenta que la velocidad que mide el observador ligado a la partícula 1 es la velocidad relativa de la partícula dos respecto de la partícula 1, entonces para un observador en tierra las ecuaciones correspondientes serán:

Para una colisión elástica: $v_1 - v_2 = -(v'_1 - v'_2)$

ó

$$\frac{v'_1 - v'_2}{v_2 - v_1} = 1 \text{..........} \mathbf{7.35}$$

Para una colisión inelástica: $v_1 - v_2 > -(v'_1 - v'_2)$

ó

$$\frac{v'_1 - v'_2}{v_2 - v_1} < 1 \text{..........} \mathbf{7.36}$$

y para una colisión completamente inelástica: $v'_1 - v'_2 = 0$

ó equivalentemente:

$$\frac{v'_1 - v'_2}{v_2 - v_1} = 0 \text{..........} \mathbf{7.37}$$

Se define el **coeficiente de restitución** como:

$$\varepsilon = \frac{v'_1 - v'_2}{v_2 - v_1} \text{..........} \mathbf{7.38}$$

el cual nos permite analizar que tipo de colisión se ha efectuado

si $\varepsilon = 1$ la colisión es elástica

si $0 < \varepsilon < 1$ La colisión es inelástica y

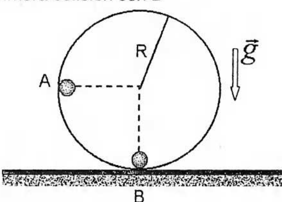
si $\varepsilon = 0$ la colisión es completamente inelástica

PROBLEMAS PROPUESTOS

1 Un coche de 60 kg. y un niño de 40 kg. se mueven juntos con una rapidez de 7 m/s. Si de repente el niño empieza a correr sobre el coche con una rapidez de 5 m/s respecto del coche y en dirección opuesta al del movimiento del coche, ¿cuál será la rapidez (en m/s) del niño respecto a tierra?

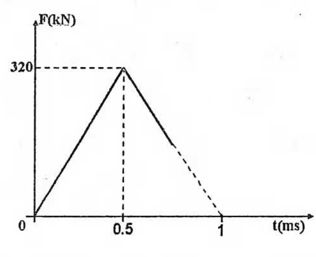
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2 Dentro de una esfera lisa de radio 5m se encuentran dos bloques A y B de masas 5 kg y 10 kg respectivamente. Si el bloque A se suelta desde la posición mostrada en la figura y luego hace impacto elásticamente con B, inicialmente en reposo, halle a qué altura (en m) se elevará el bloque A después de la primera colisión con B



A) 1/3 B) 5/9 C) 8/9 D) 5/3 E) 7/3

3 Un jugador de fútbol se dispone a ejecutar un penal. Si la fuerza que el jugador ejerce sobre el balón de 2 kg varía con el tiempo según se muestra en la figura y el contacto con el balón dura 0,75 ms, determine la rapidez (en m/s) con la que sale disparado el balón.



A) 70 B) 71 C) 72 D) 73 E) 74

Capítulo 8

Oscilaciones

INTRODUCCIÓN

Todo movimiento o suceso que se repite a intervalos regulares se dice que es **periódico**. En ciertos movimientos, un cuerpo se mueve hacia delante o hacia atrás siguiendo una trayectoria determinada entre dos posiciones extremas. Como ejemplos de esto: la vibración de la cuerda de una guitarra, o de la membrana de un altoparlante, el vaivén de un péndulo, etc. Tales movimientos periódicos constituyen ejemplos de **oscilación**. En este capítulo trataremos del estudio-en primera etapa- del movimiento oscilante mas sencillo llamado: "Movimiento Armónico Simple"; y en una segunda etapa como una extensión las "Ondas Mecánicas".

Movimiento Periódico
Es aquel que se repite cada cierto tiempo fijo llamado periodo.

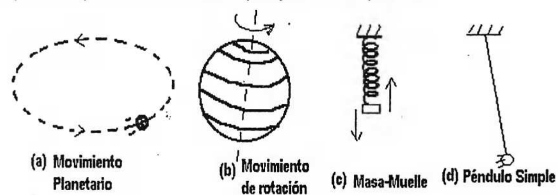


Figura 8.1 Ejemplos de movimientos periódicos. ¿En cuál de estos se efectúan oscilaciones?

Veamos a continuación en la figura 8.2, tres situaciones de equilibrio de sendas canicas sobre superficies lisas. En cada caso a la canica se le ha desplaza a ambos lados del punto equilibrio y se la ha soltado. Además se grafica la componente del peso en la dirección tangente a la pista.

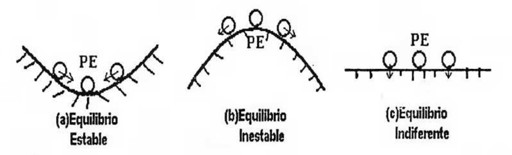


Figura 8.2 Las canicas sobre pistas lisas con una posición central de equilibrio.

¿En cuál caso de la figura anterior ocurre movimiento oscilante de la canica?
Rpta. La oscilación ocurre en (a), es decir alrededor del punto donde se tenga equilibrio estable.
A la fuerza sobre la canica que "aparece" cuando es sacada de su posición de equilibrio estable, se le llama fuerza recuperadora. Se le llama así porque tiende a llevar a la canica hacia la posición central de equilibrio. Esta fuerza es responsable de la oscilación de la canica.

Movimiento Oscilante
Tipo de movimiento periódico donde el móvil "va y viene" por el mismo camino, cambiando periódicamente el sentido de su velocidad y aceleración.
Según lo anterior, en todo movimiento oscilante debe haber :
posición de equilibrio y **fuerza recuperadora.**

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE (MAS)

8.1 Concepto
Es un movimiento: rectilíneo, periódico y oscilante; que ocurre debido una **fuerza recuperadora** sobre la partícula, cuyo valor no es constante , sino que depende del desplazamiento de la partícula respecto de su posición de equilibrio. Se le llama **armónico** por que las ecuaciones de: posición, velocidad y aceleración, se expresan en **seno** y/o **coseno.**

Descripción Cinemática de un MAS
Sea una partícula efectuando MAS en el eje X, como se muestra en la figura:

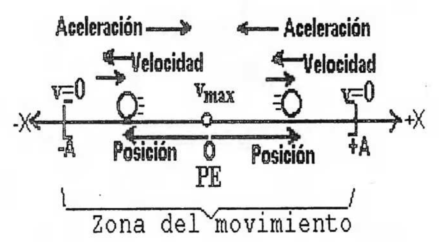


Figura 8.3 Partícula en MAS sobre el eje X.

Elementos en un MAS:

Elongación (x)
Es la coordenada x de la partícula respecto a la PE. **x** puede ser positiva o negativa; si está a la derecha, o izquierda de la PE; respectivamente.

Amplitud (A)
Es el máximo desplazamiento desde PE que alcanza la partícula. Ocurre a ambos lados (extremos)del trayecto, donde la velocidad de la partícula es v =0.

Ciclo u oscilación completa
En la figura 8.4 es el recorrido: (-A)→(O)→(+A)→(O)→(-A); o cualquier otro camino completo.

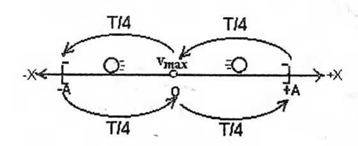


Figura 8. 4 Recorrido en cuartos de periodo de un MAS

Periodo (T)
Es el tiempo en que se realiza un recorrido completo (un ciclo).
Observe en la misma figura, que: (-A)→(O)→(+A)→(O)→(-A)
T/4 T/4 T/4 T/4

Frecuencia de oscilaciones (ν)
Es el número de oscilaciones completas en la unidad de tiempo.

ν=(# ciclos u oscilaciones o vueltas)/Δt en Hertz=[Hz]=[s^{-1}]

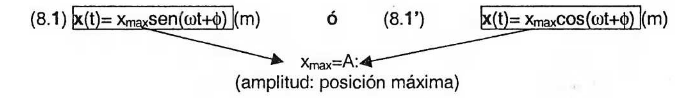
Propiedad: $\nu=1/T$

Frecuencia angular (ω)
Es la 2π veces la frecuencia:

$\omega=2\pi\nu=2\pi/T$ [rad/s]

8.2 Ecuaciones cinemáticas de una partícula en MAS sobre el eje X:

Posición (x)
Se mide desde el centro, que corresponde a la posición de equilibrio (PE). Alcanza sus máximos(amplitud) en los extremos de la trayectoria.



Velocidad (v)
Puede ir a la derecha(➔), o a la izquierda(🡐). Es cero en los extremos, y máxima en el centro, de la trayectoria; respectivamente.

(8.2) $v(t) = v_{max}\cos(\omega t+\phi)$ (m/s) ó (8.2') $v(t) = -v_{max}\text{sen}(\omega t+\phi)$ (m/s)

$v_{max} = \omega A$
(velocidad máxima)

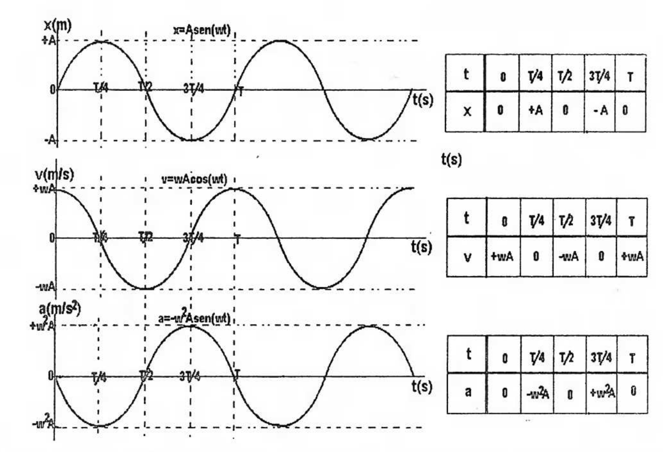
Aceleración (a)
Siempre señala hacia la PE (➝⧓⟵). Su magnitud es proporcional a la posición del móvil.

(8.3) $a(t) = -a_{max}\text{sen}(\omega t+\phi)$ (m/s^2) ó (8.3') $a(t) = -a_{max}\cos(\omega t+\phi)$ (m/s^2)

$a_{max} = \omega^2 A$
(aceleración máxima)

Donde: $(\omega t + \phi)$: Fase, es el argumento de la función armónica (en radianes)
y ϕ : Fase inicial, es un ángulo que nos indica el punto (x_o) donde se empieza a medir el tiempo ($t_o = 0$).

Ejemplo 01
Veamos un ejemplo de gráficas: posición, velocidad y aceleración; vs el tiempo de un MAS para el caso de fase inicial cero: $\phi = 0$.



t	0	T/4	T/2	3T/4	T
x	0	+A	0	-A	0

t(s)

t	0	T/4	T/2	3T/4	T
v	+wA	0	-wA	0	+wA

t	0	T/4	T/2	3T/4	T
a	0	-w²A	0	+w²A	0

Figura 8.5 Muestra las gráficas (para $\phi = 0$): **t** vs **x**; **t** vs **v** y **t** vs **a** ; respectivamente

Observaciones:

•-Las ecuaciones x, v y a: han sido presentadas en dos versiones:
{ (8.**1**), (8.**2**), (8.**3**) } y {(8.**1**'), (8.**2**'), (8.**3**') }
Cualquiera de estas debe ser tomada en conjunto, para resolver un problema de MAS. Nunca deben mezclarse ambos conjuntos para un mismo problema.

•-Los argumentos en las ecuaciones cinemáticas, se pueden llevar de seno a coseno y viceversa, aplicando: $\text{sen}(\omega t+\phi)=\cos(\omega t+\phi-\pi/2)$
ó $\cos(\omega t+\phi)=-\text{sen}(\omega t+\phi-\pi/2)$

Propiedades

A partir de las ecuaciones {(8.**1**), (8.**2**) y (8.**3**)} ó {(8.**1**'), (8.**2**'), (8.**3**')}, puede usted verificar que en cada instante:

•-Posición x y velocidad v, cumplen : $\boxed{(x)^2+(v/\omega)^2=A^2}$ **(8.4)**

•-Posición **x** y aceleración **a**, cumplen: $\boxed{\mathbf{a=-\omega^2 x}}$ **(8.5)**

Ejemplo 02

Una partícula realiza MAS con 0,15 m de amplitud y 2 Hz de frecuencia. Calcule:
a) los valores máximos de la aceleración y la velocidad,
b) la aceleración y la velocidad cuando el desplazamiento es de 0,10m, y
c) el tiempo para que la masa se desplace desde la posición de equilibrio(PE) hasta un punto a 0,12m de este.

Solución.-

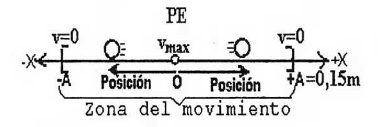


Fig. 8.6

a)x_{MAX}=A=**0,15m**,
Como ν=2Hz ⇒ $\omega=2\pi\nu=4\pi$rad/s ,
luego $v_{MAX}=\omega A=4\pi \times 0,15=$**$0,6\pi$** m/s,
y $a_{MAX}=\omega^2 A=$**$2,4\pi^2$** m/s^2.

b)A partir de la ecuación (8.5): $a=-\omega^2 x$,
⇒ $x(0,1)=-16\pi^2 \times 0,1=$**$-1,6\pi^2$** m/s^2
También, de la ecuación (4): $x^2+(v/\omega)^2=A^2$, obtenemos: $v=\omega\sqrt{(A^2-x^2)}$
⇒ $v(x=0,1)=$**$0,45\pi$** m/s

c)Podemos iniciar el conteo (t=0) en x=0. Es decir: $x=A\text{sen}\omega t$
⇒ $x(t=?)=0,12=0,15\text{sen}4\pi t$,
de lo cual: t=**0,074** s

8.3 DINAMICA EN EL MAS

En relación a las fuerzas sobre una partícula en MAS, se cumple la siguiente característica:

"La **fuerza recuperadora** sobre el móvil es proporcional a su **desplazamiento** respecto de la **posición de equilibrio**"

APLICACIONES: MASA-RESORTE HORIZONTAL,
MASA RESORTE VERTICAL,
PENDULO SIMPLE.

SISTEMA MASA RESORTE HORIZONTAL

Sea un resorte de longitud natural Lo y constante elástica k, con un extremo sujeto a la pared y el otro extremo que sujeta a un bloque de masa m, todo sobre un piso horizontal sin fricción, como se muestra en la figura 7.7.

En la misma figura se muestra que si aplicamos una fuerza deformadora horizontal al resorte, jalando al bloque hasta que alcance una elongación máxima A y lo soltamos, el bloque quedará bajo la acción de la fuerza elástica del resorte. Cuando el resorte esta estirado jala al bloque hacia el centro. Cuando el resorte esta comprimido empuja al bloque señalando también hacia el centro. Es decir esta fuerza elástica viene a ser la fuerza recuperadora.

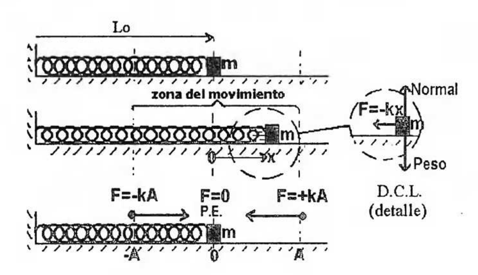


Figura 8.7 .-Fuerzas sobre un bloque(detalle) sujeto a un resorte horizontal.

La fuerza elástica actuando como fuerza recuperadora; es además la fuerza re sultante:

Fuerza recuperadora : $\boxed{F(x) = -kx}$

$$\Rightarrow F_{elástica} = -k\underline{x} = F_{resultante} = m.(a) = m(-\omega^2 x) = -m\omega^2 \underline{x}$$

Eliminando **x**, resulta que: $\boxed{\omega = \sqrt{k/m} = 2\pi\nu}$ [rad/s]

Es decir la frecuencia angular del sistema masa-resorte depende de la constante elástica y de la masa oscilante, y no depende de la amplitud de oscilación.

Ecuaciones Cinemáticas en un MAS horizontal para la masa sujeta a un resorte
Las ecuaciones de movimiento fueron presentadas en la descripción cinemática. Es decir las ecuaciones: **{** (8.**1**), (8.**2**), (8.**3**) **}** o **{** (8.**1'**), (8.**2'**), (8.**3'**) **}**

Ejemplo 03
Para el caso de la figura mostrada, el bloque sujeto al resorte esta quieto y el choque será totalmente inelástico, determinar la ecuación característica del movimiento oscilante.

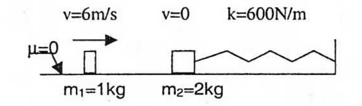


Fig. 8.8

Solución
Al juntarse los bloques la posición de equilibrio no cambia, por lo cual esta velocidad -justo después del choque-es la máxima velocidad del nuevo sistema masa-resorte. Apliquemos la conservación del momentum lineal para calcular esta velocidad del conjunto de bloques justo después del choque totalmente inelástico:

$$m_1v=(m_1+m_2)v_{MAX} \Rightarrow v_{MAX}=2\ m/s$$

Hallemos la amplitud A, reemplazando x=0, v=2m/s y $\omega=\sqrt{k/m}=\sqrt{600/3}=10\sqrt{2}$;
en $A^2=x^2+(v/\omega)^2$:

tendremos: $A=\sqrt{10}\ /10$ m

Por lo cual: $\underline{\mathbf{x= \sqrt{10}/10\ sen(2\sqrt{10}\ t)}}$

SISTEMA MASA RESORTE VERTICAL

En este caso un resorte de longitud natural Lo y constante elástica k se coloca en forma vertical, con un extremo sujeto al techo y el otro extremo inicialmente libre. Luego del extremo inferior del resorte se sostiene un bloque de masa m, el que deformará la longitud del resorte en forma proporcional al peso suspendido, como se muestra en la figura a continuación:

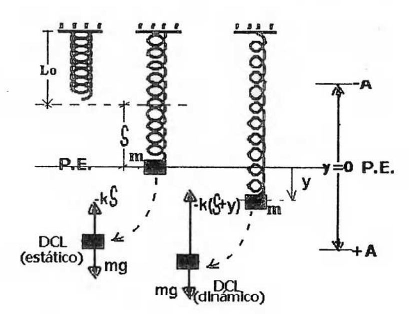


Figura 8.9 Sistema masa-resorte vertical. Observe la deformación del resorte, en situación estática; y en situación dinámica.

En el equilibrio el peso del bloque se compensa con la fuerza elástica estática,.

Condición estática: $mg-k\delta = 0$, luego : $mg = k\delta$

Cuando el bloque oscile en forma vertical, lo hará en forma simétrica alrededor del nivel donde el bloque se encontraba en reposo (posición de equilibrio).

Condición dinámica: $mg-k(\delta+y) = mg-k\delta-ky= ma_y$, y como $mg=k\,\delta$
entonces, $-ky = ma_y$

Despejando: $\mathbf{a}_y = -(k/m)\mathbf{y} = -\omega^2\mathbf{y}$

Que representa la ecuación dinámica del movimiento vertical de un bloque de masa m sujeta a un resorte vertical de constante elástica k. Según lo cual este sistema masa-resorte vertical oscila en MAS alrededor de su PE con una frecuencia similar al sistema bloque-resorte, horizontal.

Es decir con frecuencia angular:

$$\boxed{\omega = \sqrt{k/m} = 2\pi\nu} \quad \text{[rad/s]}$$

Ecuaciones Cinemáticas en un MAS vertical
Las ecuaciones de movimiento fueron presentadas en la descripción cinemática. Es decir las ecuaciones: { (7.1), (7.2), (7.3) } o { (7.1'), (7.2'), (7.3') }

Problema 04
Una partícula que cuelga de un resorte sometido solo a la acción del peso y la fuerza del resorte, está en reposo, ver figura. De pronto se le imprime una velocidad v=1m/s hacia arriba. Si la amplitud de la oscilación que realizará es de 0,2m, hallar su posición vertical δ (medida desde la posición de equilibrio) en t=0,224s

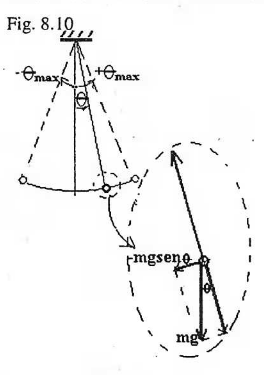
Solución:
El nivel inicial del bloque en reposo es la posición de equilibrio, lugar donde ocurre la máxima rapidez: $v_{MAX} = \omega A$.
Reemplazando: v = 1m/s y A= 0,2 m $\Rightarrow \omega = 5$ rad/s
Asumimos la ecuación de movimiento para la coordenada vertical
$\delta = A\ \mathrm{sen}\omega t$.

(sen1,12=0,9).

$\Rightarrow \delta(t=0.224)=0{,}2\mathrm{sen}(5\mathrm{x}0{,}224)=0{,}2\mathrm{xsen}(1{,}12)=0{,}2\mathrm{x}0{,}9=$**0,18 m**

PENDULO SIMPLE

Consta una masa puntual suspendida del extremo inferior de una cuerda de longitud L, inextensible. La masa oscila alrededor del punto superior de la cuerda.



En la figura de la izquierda: la masa ha sido desplazada una amplitud angular θ_A y se le se le ha soltado. En la parte inferior derecha se muestra la componente del peso en dirección tangente a la trayectoria, la cual tiende a llevar a la masa pendular hacia la posición de equilibrio.

La oscilación del péndulo será MAS solo para desplazamientos angulares pequeños:
$\theta < \pi/12$ rad = 15° $\Rightarrow$ **$\mathrm{sen}\theta = \theta$**
y como $x = L\theta$:

$F_{rec} = -mg\,\mathrm{sen}\theta = -mg\theta = F_T = ma_T = m(-\omega^2 x) = -m\omega^2 L\theta$

Frecuencia angular del péndulo simple: $\boxed{\omega = \sqrt{g/L} = 2\pi\nu = 2\pi/T}$

Figura 8.11 .- Muestra el péndulo simple : Posiciones extremas y DCL

Ecuaciones Cinemáticas del Péndulo Simple como un MAS

Escogiendo $\theta=0$ en la PE, con $\theta>0$ hacia la derecha, tenemos las ecuaciones de movimiento angulares, que se toman a partir de la descripción cinemática Gral. del MAS. Es decir:

Posición angular(θ) :

(07.1.6) $\theta(t)= \theta_A sen(\omega t+\phi)$ 07.1.6´) $\theta_A(t)= \theta_A cos(\omega t+\phi)$ [rad]

Velocidad angular(Ω):

(0.7.7) $\Omega(t)=\omega\theta_A cos(\omega t+\phi)$ ó (07.1.7´) $\Omega(t)=-\omega\theta_A sen(\omega t+\phi)$ [rad/s]

Aceleración angular(α):

(07.1.8) $\alpha(t)=-\omega^2\theta_A sen(\omega t+\phi)$ (07.1.8´) $\alpha(t)=-\omega^2\theta_A cos(\omega t+\phi)$ [rad/s^2]

Ejemplo 05

Un péndulo simple cuya masa oscilante es1 kg tiene una velocidad angular en función del tiempo, dada por:

$$\Omega = \pi \cos(20t) \text{ rad/s.}$$

Halle aproximadamente la tensión de la cuerda cuando la masa pasa por el punto mas bajo de su trayectoria. ($\pi^2 = 10$, g = 10 m/s^2).

Solución: Veamos el DCL en la posición mas baja de del movimiento oscilante:

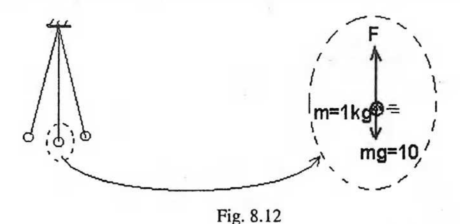


Fig. 8.12

En esta posición inferior ocurre la máxima velocidad angular Ω de la masa pendular.

$\Omega = \pi \cos(20t)_{max} = \pi$

Del DCL: $F\text{-}mg = ma_{cp} = m\ \Omega^2 R.$

donde $\omega=\sqrt{g/L} \Rightarrow 20^2=10/L$ es decir: $L = 1/40$ m

Reemplazando en la fuerza de tensión: $F = mg\text{-}+m\ \Omega^2 R.$

$\Rightarrow$ $F=10+=(1)(\pi^2)(1/40)=$**10,25 N**

8.4 ENERGIA MECANICA DE UN OSCILADOR ARMONICO

Probaremos que, una vez iniciado el movimiento de un oscilador armónico su energía mecánica será la misma en todo instante y en cada punto de su trayectoria oscilante. Para lo cual consideremos al sistema masa-resorte horizontal, mostrándolo en un cierto instante, según la Fig. 8.8 a continuación:

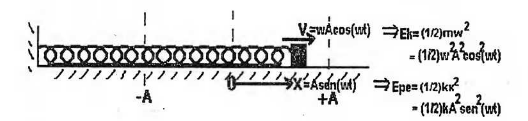


Figura 8.13 Energías de un sistema masa-resorte, como la energía de MAS

El sistema tiene energías: potencial elástica, y cinética (no hay gravitatoria):

$$E = E_{pe} + E_k$$
$$= (1/2)kx^2 + (1/2)mv^2$$
$$=(1/2)[kA^2sen^2(\omega t+\phi) + m(k/m)A^2 \cos^2 (\omega t+\phi)]= (1/2)kA^2\ [sen^2 +cos^2 =1]$$

Por lo tanto: $\boxed{E = (1/2)kx^2 + (1/2)mv^2 = Cte. = (1/2)kA^2 = (1/2)mv_M^2}$

(en cualquier punto) (en los extremos) (en el centro)

Veamos a continuación la dependencia de las energías vs el tiempo y vs la posición; respectivamente:

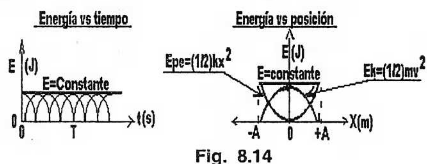


Fig. 8.14

Se muestra las gráficas de las energías del oscilador armónico vs el tiempo, y la posición; respectivamente

Ejemplo 06

Una masa de 0,1kg se encuentra realizando un MAS en el eje x, de ecuación x(t)=0,4cos(10t). En una cierta posición(a la derecha de x=0) e instante, es detenido mediante un proyectil de masa 0,01kg y $\mathbf{v_p}=-20\sqrt{3}\ \mathbf{i}$ m/s, quedando incrustado en ella. Determinar la energía del nuevo sistema masa-resorte.

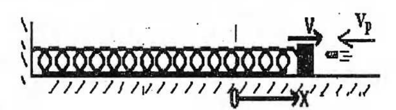


Fig. 8.15

Solución .-
Hallemos la constante del resorte, que no cambiará cuando se incruste el proyectil:

$$\omega^2 = k/m \Rightarrow k = \omega^2 m = 10^2 \times 0{,}1 = 10 \text{ N/m}$$

En el punto donde ocurre la colisión totalmente inelástica corresponde a la nueva amplitud del sistema (bloque y bala)-(resorte) ya que la bala se detiene instantáneamente junto con el bloque.

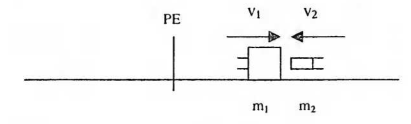


Fig. 8.16

Hallemos esta nueva amplitud aplicando la conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_1 \mathbf{v_1} + m_2 \mathbf{v_2} = 0$$

De $x(t) = 0{,}4\cos(10t) \Rightarrow \quad v_1(t) = -4\text{sen}(10t)$

Reemplazando en la conservación de la cantidad de movimiento:

$$0{,}1\times[-4\text{sen}(10t)] = 0{,}01\times[-20\sqrt{3}\,] \Rightarrow \quad 10t = \pi/3$$

De lo cual, la nueva amplitud será: $A = x(10t{=}\pi/3) = 0{,}4\cos(\pi/3) = 0{,}2$

Por lo tanto, la nueva energía: $E_{mec} = (1/2)kA^2 = (1/2)\times 10\times 0{,}2^2 = \underline{0{,}2}$ J

PROBLEMAS PROPUESTOS DE MAS

MAS: Cinemática

1.-Una partícula se mueve en un tramo de 20 cm del eje X haciendo MAS, con una frecuencia de 120 ciclos/min. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa mejor la posición x(en m) del móvil, si en t=0 s, x=0 m?
A) $x=0{,}2\text{sen}(4\pi t)$, B) $x=0{,}1\cos(4\pi t)$ C) $x=0{,}1\cos(2\pi t-\pi/2)$ D) $x=0{,}1\cos(4\pi t-\pi/2)$

2.-Un oscilador armónico simple demora $\pi/4$ s en alcanzar su amplitud, tiempo medido a partir de la posición de equilibrio. Si la máxima aceleración del oscilador es 0,5 m/s^2, calcular su máxima rapidez(en m/s).
A) 1/10 B) 1/8 C) 1/6 D) 1/4 E) 1/2

MAS: Sistema masa-resorte horizontal:

3.-La figura muestra un móvil en M.C.U. de radio 1m y velocidad angular 5π rad/s. Halle aproximadamente las componentes x, v_x y a_x, del móvil en el instante mostrado, las cuales son las correspondientes cantidades: posición, velocidad y aceleración de un móvil en MAS a lo largo del eje x, con una amplitud igual al radio de la trayectoria circular.

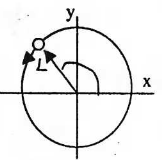


Fig. 8.17

Rpta.: -0,6 m; -4π m/s; $15\pi^2$ m/s^2.

4.-Un bloque (m = 1 kg) unido al extremo de un resorte (k = $25\pi^2$ N/m) puede oscilar alrededor de la posición de equilibrio, sobre la superficie horizontal. Se estira el resorte y se observa que luego de 1/15 s el bloque pasa por primera vez por la posición x = 0,20 m. Hallar la amplitud (en m) de la oscilación.
A) 0,25 B) 0,30 C) 0,35 D) 0,40 E) 0,45

MAS: Sistema masa-resorte vertical:

5.- Un resorte (k = 20 N/m) cuelga de un punto en el techo y sostiene en equilibrio a un cuerpo de masa m = 0,5 kg en su extremo inferior. Jalando vertical y lentamente al bloque, el resorte se estira 0,2 m y se suelta. Halle la energía cinética (en mJ) del cuerpo en el instante que su aceleración se anula.

a) 200 b) 250 c) 300 d) 350 e) 400

6.-Se tiene un resorte de constante k = 100 N/m suspendido en posición vertical. Se coloca una masa de 1 kg en el extremo libre del resorte y luego se suelta. ¿Cuál es la rapidez (en m/s) de la masa cuando pasa por su posición de equilibrio?
A)0,5 B)1,0 C)1,5 D)2,0 E)2,5

MAS: Péndulo Simple:

7.- Se muestra un gráfico T' vs L, donde T' = $T/2\pi$; T periodo y L longitud de un péndulo simple en un planeta X.
Cuando T' = 2 s, halle L (en m) y la aceleración de la gravedad (en m/s^2) de dicho planeta.

a) 20 ; 5 b) 20 ; 10 c) 10 ; 5 d) 10 ; 20 e) 15 ; 15

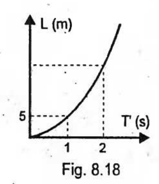


Fig. 8.18

8.-Una bolita se encuentra en el fondo de un recipiente cuya forma es la de una superficie semiesférica lisa de radio R = 22,05 m. Si se desplaza la bolita ligeramente de su posición de equilibrio y luego se le suelta, halle el tiempo (en s) que demora la bolita en retornar a su posición de equilibrio. (g = 9,8 ms^2)
A)0,4 B)1,4 C)2,4 D)3,4 E)4,4

MAS: Energía del Oscilador Armónico

9.- En el instante mostrado el bloque de masa m = 2 kg sujeto al resorte, se está moviendo con rapidez 0,5 m/s. Según lo cual halle la energía cinética máxima (en J) del oscilador. Considere una amplitud A = 10 cm.

a) 0,2 b) 0,4 c) 0,6 d) 0,8 e) 1,0

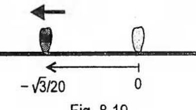
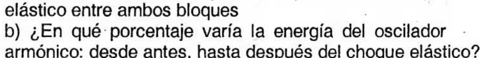


Fig. 8.19

10.-Una partícula descansa en el punto B y otra, atada a un resorte, es soltada desde el punto C. Si D es el punto de equilibrio del sistema masa-resorte, halle:

a) Las energías potencial elástica y cinética del sistema masa-resorte, justo después del choque elástico entre ambos bloques



b) ¿En qué porcentaje varía la energía del oscilador armónico: desde antes, hasta después del choque elástico?

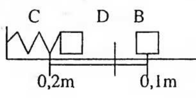


Fig. 8.20

11.- Se tiene una partícula realizando MAS, con ampltud A y periodo T. ¿Qué tiempo le toma ir desde $x_1 = 0$ hasta $x_2 = A/2$?. ¿ Es el mismo tiempo para ir desde $x_2 = A/2$ hasta $x_3 = A$?. Considere los caminos mas cortos.

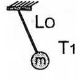
A) T/12 B) T/10 C) T/8 D) T/6 E) T/2

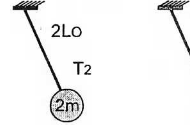
12.- La figura muestra un conjunto de 03 péndulos simples de periodos T_1, T_2 y T_3 respectivamente. Según lo cual determine la verdad (V) o falsedad (F) de las proposiciones siguientes:

I. $T_1 = T_2 \neq T_3$

II $T_2 = T_3 \neq T_1$

III. $T_1 = T_2 = T_3$.





2Lo T3 m

A) VVV B) FFF C) VFF D) FVF E) VFV

13.- Un bloque de masa m = 0,3 kg, efectúa MAS sobre el eje X, según la ecuación $x = 0{,}4\text{sen}(15t + \pi/4)$ m (t en segundos). Determine la máxima fuerza (N) recuperadora que actúa sobre el bloque.

A) 27 B) 29 C) 31 D) 33 E) 36

ONDAS



MOVIMIENTO ONDULATORIO

El movimiento ondulatorio aparece en casi todos los campos de la física.
Todos estamos familiarizados con las ondas formadas en el agua, hay también ondas sonoras, ondas luminosas, ondas electromagnéticas.

8.5 CONCEPTO DE ONDA

Cuando en el seno de un medio material se produce una perturbación, consecuencia de alguna variación en una magnitud física, como puede ser la presión, la temperatura, el campo eléctrico, o simplemente una deformación, esta se trasmite o propaga al resto del sistema, produciendo una onda .

El movimiento ondulatorio es la propagación de la onda de perturbación en el medio material íntimamente relacionado con el movimiento armónico.

En este capitulo nos limitaremos al estudio de las ondas mecánicas. Debe tenerse muy en cuenta que al propagarse las ondas, las partículas del medio no se desplazan con la onda, sino que continúan vibrando en torno a su posición de equilibrio.

8.6 TIPOS DE ONDAS

Podemos distinguir diversas clases de ondas al considerar como están relacionados los movimientos de las partículas de materia con respecto a la dirección de propagación de las ondas mismas.

ONDAS TRANSVERSALES

Si los movimientos de las partículas de materia donde se propaga la onda son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda misma, decimos que se trata de una onda transversal.

En la figura 8.21 muestra un pulso de onda transversal en un muelle, la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

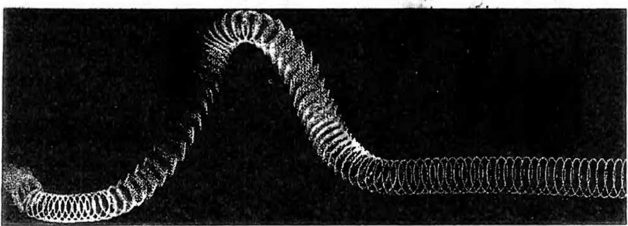


Figura 8.21

Las ondas luminosas no son mecánicas. La perturbación que se propaga no es un movimiento de materia sino un campo electromagnético. Pero como los campos eléctricos y magnéticos son perpendiculares a la dirección de propagación, las ondas luminosas son también transversales.

ONDAS LONGITUDINALES

Si el movimiento de las partículas del medio material que transporta la onda, coincide con la dirección de propagación, las ondas son longitudinales.
Las ondas sonoras son ejemplos de ondas longitudinales.

Las moléculas de un gas líquido o sólido a través de los cuales se propaga el

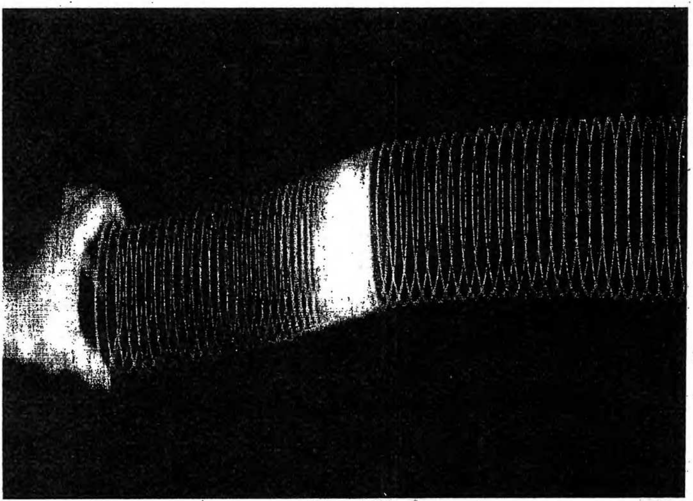


Figura 8.22

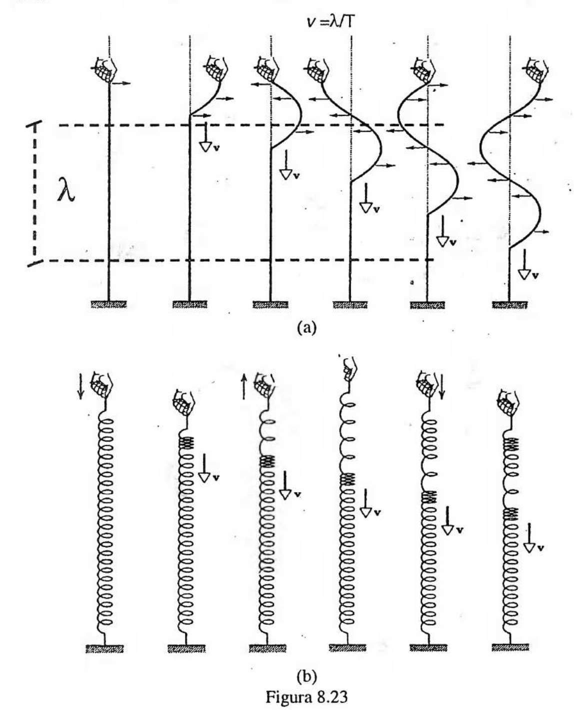
sonido oscila en la misma dirección de propagación; comprimen y enrarecen alternativamente el medio. La figura 8.22 muestra una onda longitudinal en un resorte.

8.7 VELOCIDAD DE PROPAGACION

Si la fuente que hace oscilar el extremo de una cuerda tensa en un sentido y en otro realiza un M.A.S.,se genera un tren de onda que avanza por la cuerda a velocidad constante, en este movimiento, cada partícula de la cuerda tiene un movimiento periódico, idéntico al generado por la fuente.

Obsérvese en la figura 8.23 que para un tiempo t=T, la onda se propaga una cierta longitud, llamada longitud de onda "λ". Por tanto, si v es la velocidad de propagación de la onda o velocidad de fase, se verifica.

$$v = \lambda / T$$



(b)

Figura 8.23

8.8 ONDAS VIAJERAS UNIDIMENSIONALES

Consideremos una cuerda larga estirada en la dirección del eje x a lo largo del cual va avanzando una onda transversal. En cierto momento, digamos t=0, la forma de la cuerda se puede representar por.

$$y = f(x) \quad en\ t = 0$$

Tal como se muestra en la figura 8.24 (a)

Siendo "y" la elongación transversal de la cuerda en la posición "x", si asumimos un tiempo "t", la onda avanza a lo largo de la cuerda sin cambiar su forma, con tal que las pérdidas internas por rozamiento sean suficientemente pequeñas.

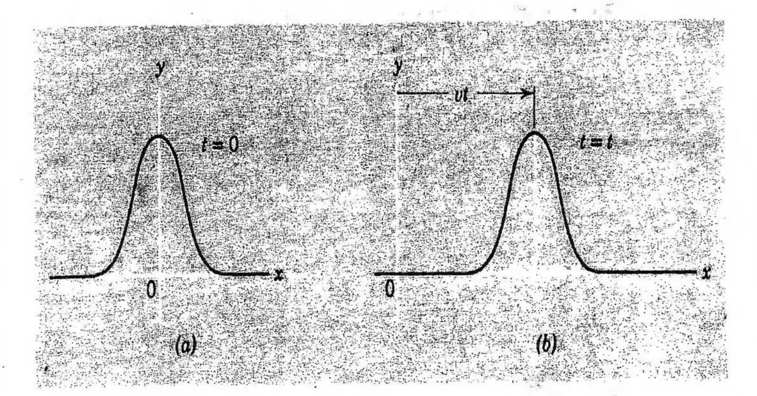


Figura 8.24

Al cabo de cierto tiempo t, la onda ha avanzado una distancia **vt a la derecha**, tal como se muestra en la figura 8.24 (b)

$$x = vt$$

La ecuación de la curva en el instante "t" es:

$$y = f\,(x - vt)$$

Para una onda que se propaga según el eje **X** positivo.
Para una onda viajera que se propaga en sentido contrario al anterior escribiríamos

$$y = f\,(x + vt)$$

8.9 ONDAS ARMONICAS

Consideremos ahora una cierta forma de onda. Supongamos que para el tiempo t= 0 tenemos en la cuerda un tren de ondas dado por:

$$y = y_m \, sen \, \frac{2\pi}{\lambda} x$$

Donde la forma de la onda es una senoide, de amplitud máxima y_m.
El valor del desplazamiento transversal o elongación "y" es el mismo en "x", que en $x+\lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente.

Si transcurre cierto tiempo "t", considerando que la onda avance hacia el eje +X con una velocidad de fase v, la ecuación de onda en dicho instante t es:

$$y = y_m \, sen \, \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt)$$

Si definimos dos cantidades, el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y la frecuencia angular $w = \frac{2\pi}{T}$, la ecuación de onda se puede expresar.

$$y = y_m \, sen \, (kx - \omega t)$$

Para una onda que avanza hacia el eje -X (hacia la izquierda), la ecuación de onda será:

$$y = y_m \, sen\,(kx + \omega t)$$

En las ecuaciones anteriores hemos supuesto que la elongación **Y** es cero en el punto $x = 0$ en el instante t =0 , en general la ecuación de un tren de onda que avanza hacia la derecha es:

$$y = y_m \, sen\,(kx - \omega t - \phi)$$

donde ϕ = fase inicial del M.A.S. en el punto x = o en el instante t = 0.

8.10 SUPERPOSICION DE ONDAS

Si en una misma región del espacio se propagan dos o más ondas (ondas componentes), el movimiento de los puntos del medio puede considerarse como si se estuviera propagando una sola onda, es decir, la que resulta de la suma trigonométrica de las ondas componentes.

8.11 UN CASO PARTICULAR DE SUPERPOSICIÓN

La superposición se refiere a los efectos físicos de dos o mas trenes de ondas. Consideremos dos ondas de igual frecuencia y amplitud que avanzan con la misma velocidad en la dirección +X pero con una diferencia de fase ϕ entre ellas

$$y_1 = y_0 \, sen\,(kx - \omega t - \phi)$$

$$y_2 = y_0 \, sen\,(kx - \omega t)$$

ahora encontramos la onda resultante, la cual, suponiendo que ocurra una superposición, es la suma

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = y_0 \; [sen(kx - \omega t - \phi) + sen(kx - \omega t)]$$

desarrollando, obtenemos:

$$y = 2y_0 \cos \frac{\phi}{2} \; sen\,(kx - \omega t - \phi/2\,)$$

Esta onda resultante corresponde a una nueva onda cuya amplitud es $2y_0 . \cos \frac{\phi}{2}$, *si* ϕ es cero $\cos \frac{\phi}{2} = 1$ y se llama interferencia constructiva (máxima amplitud)

y si $\phi = 180°$, $\cos \frac{\phi}{2} = 0$ entonces la amplitud resultante es cero y se llama interferencia destructiva.

8.12 VELOCIDAD DE LAS ONDAS EN UNA CUERDA TENSA

La rapidez de una onda en una cuerda estirada puede ser determinada fácilmente para el caso de las ondas lineales, la velocidad de las ondas mecánicas sólo dependen de las propiedades del medio por el que se propaga la perturbación.

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Un pequeño segmento de la cuerda de longitud Δl, y masa Δm forma aproximadamente el arco de un círculo de radio "R".

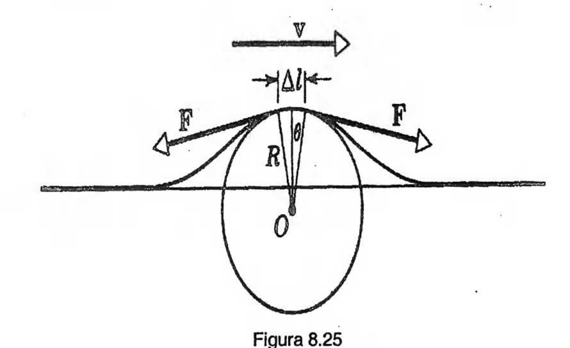


Figura 8.25

La fuerza radial total sobre $\Delta\ell$ es:

$$F_R = 2FSen\theta \cong 2F\,\theta$$

$$si \qquad \mu = \frac{\Delta m}{\Delta \ell} \qquad \Delta m = \mu\Delta\ell$$

$$\Delta m = \mu(R2\theta)$$

$$F_R = 2F\theta = \frac{\Delta m v^2}{R}$$

$$2F\theta = \mu(R2\theta)\frac{v^2}{R}$$

$$V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

8.13 REFLEXION Y TRASMISION DE LAS ONDAS

Siempre que una onda viajera alcanza una frontera, parte o toda la onda se reflejará, dependiendo de la frontera, pueden suceder los siguientes casos, por ejemplo en la cuerda:

a) Reflexión de una onda viajera en el extremo fijo de la cuerda estirada, se observa que el pulso reflejado está invertido, pero su forma no cambia, ver figura 8,26 (a)
b) Reflexión de una onda viajera en el extremo libre de una cuerda estirada, en este caso, el pulso reflejado no está invertido, ver figura 8.26(b).
   A medida que el pulso llega al poste, este ejerce una fuerza sobre el extremo libre, provocando que el aro se acelere hacia arriba.

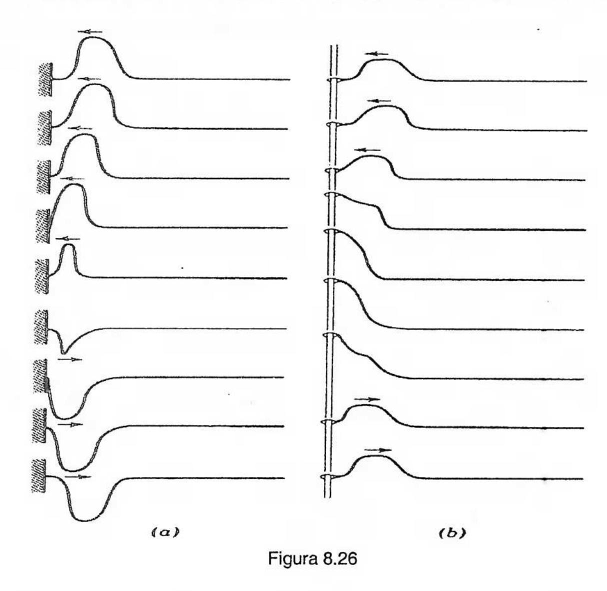
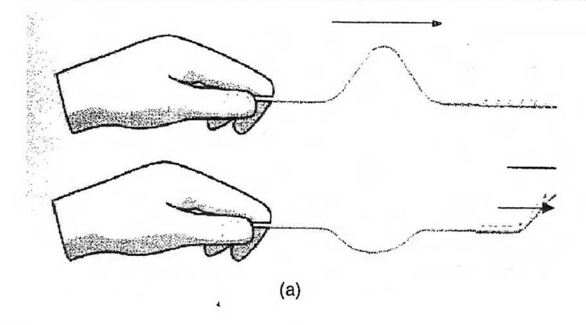


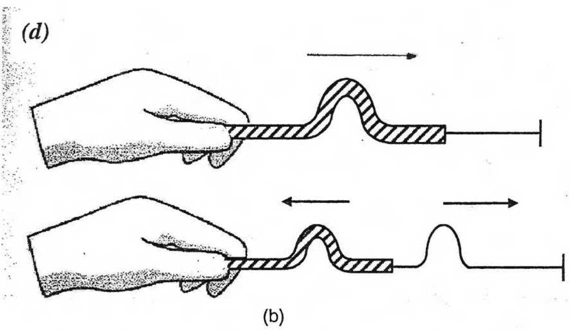
Figura 8.26

c) Pulso que viaja hacia la derecha por una cuerda ligera unida a una cuerda gruesa parte del pulso se refleja (y se invierte) y parte se trasmite por una cuerda gruesa, ver figura 8.27(a)

d) Pulso que viaja hacia la derecha por una cuerda gruesa unida a una cuerda ligera, el pulso incidente se refleja en forma parcial y se trasmite parcialmente. En este caso el pulso reflejado no esta invertido, ver figura 8.27(b)



(a)



(b)

Figura 8.27

8.14 ONDAS ESTACIONARIAS EN CUERDAS

Una onda armónica tiene forma senoidal, si escogemos una onda armónica unidimensional que viaja a la derecha con rapidez "v", en el instante t = 0, el desplazamiento de la curva se puede escribir como

$$y = A\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

donde:

A = Amplitud

λ = Longitud de Onda

De la ecuación, se ve que el desplazamiento se repite a si mismo cuando "x" se incrementa por un múltiplo entero de "λ"

Si la onda se mueve hacia la derecha con una velocidad de fase "v", la función de onda en un tiempo posterior "t" está dada por:

$$g(x,t) = A\text{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

si en un tamaño finito, tal como una cuerda estirada sostenida por dos soportes fijos, separados una distancia L, las ondas que avanzan por la cuerda se reflejan en los extremos de la cuerda, esto es, en los soportes cada una de estas reflexiones da lugar a una onda que avanza por la cuerda en sentido opuesto. Las ondas reflejadas se suman a las ondas incidentes de acuerdo con el principio de superposición.

Consideremos dos trenes de onda de la misma frecuencia, velocidad y amplitud que van avanzando en sentidos opuestos en una cuerda.

$$y_1 = y_0 \text{sen}(kx - \omega t)$$

$$y_2 = y_0 \text{sen}(kx + \omega t)$$

Por consiguiente la resultante, es la ecuación de una onda estacionaria, $y = y_1 + y_2$

$y = 2y_0 \text{sen}kx \cos\omega t$, $(\phi = 0)$; Note que esta ecuación ya ha sido deducida anteriormente.

Nótese que una partícula en un punto cualquiera "x" ejecuta un movimiento armónico simple al transcurrir el tiempo y que todas las partículas vibran con la misma frecuencia. La amplitud $2y_0 \text{sen}kx$ de la onda estacionaria tiene un valor máximo de $2y_0$ en los puntos donde.

$$kx = \frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2}, \ \frac{5\pi}{2}, ...$$

$$x = \frac{\pi}{2k}, \ \frac{3\pi}{2k}, \ \frac{5\pi}{2k}, ...$$

O sea:

$$x = \frac{\lambda}{4}, \ \frac{3\lambda}{4}, \ \frac{5\lambda}{4}, ...$$

Estos puntos se llaman antinodos o vientres y están espaciados de media en media longitud de onda, ver figura 8.28

De forma similar la amplitud $2y_0$senkx de la onda estacionaria tiene un valor mínimo igual a cero en los sitios llamados nodos en donde:

$$kx = \pi, \ 2\pi, \ 3\pi, \ 4\pi$$

$$x = \frac{\pi}{k}, \ \frac{2\pi}{k}, \ \frac{3\pi}{k}, ...$$

$$x = \frac{\lambda}{2}, \ \lambda, \ \frac{3\lambda}{2}, ...$$

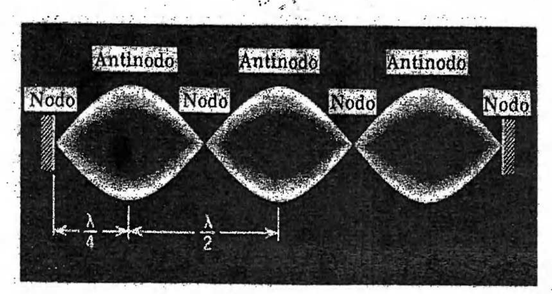
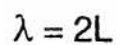
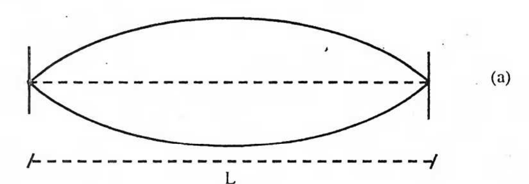


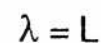
Figura 8.28

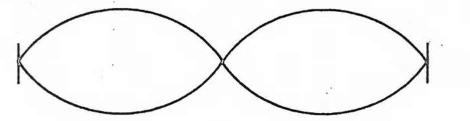
Se pueden lograr, ondas estacionarias dependiendo de la longitud de la cuerda y de la longitud de la onda.

Si la longitud de la onda, es $\lambda = 2L$, la cuerda vibrará en frecuencia fundamental o también llamado primer armónico

PRIMER ARMONICO 
$\lambda = 2L$

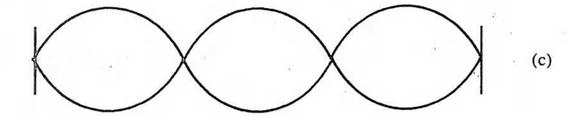


SEGUNDO ARMONICO 
$\lambda = L$



(b)

TERCER ARMONICO $\lambda = \frac{2L}{3}$



CUARTO ARMONICO $\lambda = \frac{L}{2}$

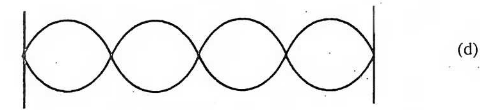


Figura 8.29

Esta expresión se puede generalizar para el n-ésimo armónico:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Si v es la velocidad de las ondas que se superponen para formar la onda estacionaria, entonces la frecuencia ν_n del n-ésimo armónico es dada por:

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

donde F es la tensión de la cuerda y μ es la densidad lineal de masa.

8.15 ENERGIA TRASMITIDA POR LAS ONDAS EN UNA CUERDA

Sabemos que a medida que las ondas se propagan por algún medio, ellas transportan energía y momentum lineal.
Enfoquemos la atención sobre un elemento de la cuerda de longitud Δx y masa Δm, cada elemento se mueve verticalmente con un movimiento armónico simple.
La energía total ΔE asociada al elemento Δx a una partícula está dada por:

$$\Delta E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\Delta m v_{max}^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}(\Delta m)w^2A^2$$

La potencia transmitida por la onda es igual a la energía contenida en una longitud de onda dividida entre el periodo de la onda
Entonces en un elemento de longitud Δx, que tiene una masa $\Delta m = \mu\,\Delta x$ la energía es:

$$\Delta E = \frac{1}{2}(\mu\Delta x)w^2A^2$$

La potencia media o la rapidez con la que se transmite la energía a lo largo de la cuerda está dada por

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,\mu\frac{\Delta x}{\Delta t}\,w^2A^2$$

$$P_m = \frac{1}{2}\mu v w^2A^2$$

v es la velocidad de la onda.

EJEMPLO 07

Una onda cuya ecuación es y = 0,072 sen(2,6x - 270 t), en unidades del S.I. Se propaga por una cuerda de densidad lineal μ =0,080 kg/m. Hallar la potencia media que se propaga.

SOLUCION

Para determinar la potencia media necesitamos conocer la velocidad de propagación

v = w/k , de la ecuación observamos que : k = 3,6 m^{-1} y w = 270 rad/s

Entonces v = 270/2,6 m/s = 103,8 m/s

$P_m = (\mu v w^2 A^2)/2$

$P_m = (0,08)(103,8)(270)^2 (0,072)^2/2$

$P_m = 1569,0$ W

EJEMPLO 08

Se tiene una cuerda cuya densidad lineal de masa μ = 2 kg/m. Si la ecuación de onda viajera es y = 2 sen ($\pi x - \pi t$) cm. Determine la tensión de la cuerda si esta se encuentra horizontal.

SOLUCION

Para determinar la tensión de la cuerda necesitamos conocer la velocidad de la onda y la densidad lineal de la cuerda

v = w/k = $\pi \times 10^{-2} / \pi = 1 \times 10^{-2}$ m/s

Sabemos que v = $(T/\mu)^{1/2}$. Entonces: $1 \times 10^{-2} = (T/2)^{-1/2}$;T = 2×10^{-4} N.

EJEMPLO 09

Una cuerda estirada con densidad lineal de masa μ = 5×10^{-2} kg/m, se encuentra a una tensión de 80 N, si la longitud de la cuerda es de 2 m. Determine la frecuencia de vibración de un extremo de la cuerda para lograr una estacionaria en el cuarto armónico.

SOLUCION

La frecuencia de vibración en el cuarto armónico puede ser obtenido de la expresión

$\nu = \dfrac{n}{2L}\left(\dfrac{F}{\mu}\right)^{1/2}$, como se trata del cuarto armónico n = 4 , reemplazando obtenemos:

$\nu = (4/2\times2)\ (80/5\times10^{-2})^{1/2}$; $\nu = 40$ Hz

EJERCICIO

Una onda senoidal que viaja en la dirección positiva de las "x" tiene una amplitud de 15 cm, una longitud de onda de 40 cm, y una frecuencia de 8 Hz. Si el desplazamiento de la onda en $x = 0$ y $t = 0$ es de 15 cm . Determine:

a) El numero de onda

b) El periodo

Rp. $K = 5\pi$ rad m^{-1} ; $T = 0{,}125$ s

8.16 ONDAS SONORAS

Las ondas sonoras son ondas mecánicas longitudinales que se pueden propagar en sólidos, líquidos y gases.

Las partículas materiales que transmiten tales ondas oscilan en la dirección de la propagación de la onda misma. Hay una gran variedad de frecuencias dentro de las cuales se pueden generar ondas mecánicas longitudinales, estando las ondas sonoras en el intervalo audible de 20 Hz a 20000 Hz. Las ondas infrasónicas son las que tienen frecuencias debajo del intervalo audible y las ondas mecánicas longitudinales cuya frecuencia es superior al límite audible, se denomina onda ultrasónica.

Sabemos que una onda transporta energía y cantidad de movimiento, por lo tanto la onda sonora también.

POTENCIA

Si consideramos una onda sonora que se propaga en una sola dirección por una sección de área A, con una amplitud de vibración X_o, la potencia media P podemos determinarla.

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

$$P = \frac{\rho A v w^2 x_o^2}{2}$$

Donde:

w = Frecuencia Angular
v = Velocidad Propagación
ρ = Densidad Media

INTENSIDAD.- La potencia media P por unidad de área A perpendicular a la dirección de propagación se denomina intensidad I:

$$I = \frac{P}{A}$$

Las unidades de la intensidad son watt por metro cuadrado. A una distancia R de un foco puntual, la intensidad

$$I = \frac{P}{4\pi R^2}$$

La potencia a cualquier distancia R debe distribuirse sobre una superficie esférica de área $4\pi R^2$

Las intensidades a las distancia R_1 y R_2 son:

$$I_1 = \frac{P}{4\pi R_1^2} \quad \text{y} \quad I_2 = \frac{P}{4\pi R_2^2}$$

Como la potencia media P es la misma en cualquier superficie centrada en la fuente, la proporción entre las intensidades sobre estas dos superficies esféricas es:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

Para que una onda acústica produzca la sensación de sonido es necesario que la intensidad supere una magnitud mínima determinada, llamada umbral de audición.

Los sonidos cuya intensidad es inferior al umbral de audición no son perceptibles para el oído, recordar el rango audible [20; 20000] Hz.

Según la ley psicofísica de Weber-Fechner, la figura 8.30 muestra la gráfica de la intensidad (W/m^2) versus la frecuencia en Hz.

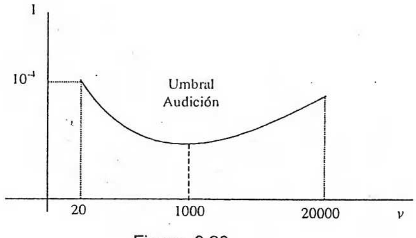


Figura 8.30

Convencionalmente se toma como nivel nulo el correspondiente a:

$I_o = 10^{-12}\dfrac{W}{m^2}$ Para una frecuencia de 1000 Hz.

Ley de Weber-Fechner

$$L = K \log \frac{I}{I_o}$$

K = Coeficiente de proporcionalidad

L = Nivel de intensidad del sonido.

Si suponemos K = 1

$$L = \log \frac{I}{I_o}$$

La unidad de nivel de intensidad es el bel (B)

Como divisor del bel se usa el decibel que es diez veces menor.

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_o}$$

En la escala el umbral de audición es $\beta = 0.$ dB

El umbral del dolor es $\beta = 120$ dB

Niveles de intensidad sonora de algunos sonidos comunes.

Tabla 8.1

Fuente de **sonido**	**Nivel sonoro (dB)**
Umbral auditivo	O
Murmullo leve	30
Zumbido de Mosquito	40
Conversación Normal	50
Tráfico Intenso	80
Fortisismo Orquesta	100
Concierto Rock	120
Ruido motor avión a 3 m.	130

PROBLEMAS

1. Sea la Ecuación de onda

$y = 5 \text{ sen}\left(\frac{2\pi}{3}z - \frac{\pi}{6}t\right)$, con unidades del S. I., marcar verdadero (V) y falso (F).

( ) La longitud de onda es 1/3 m.
( ) El periodo es 12 s .
( ) La onda se propaga en la dirección – Z.

a) FFF b) VFF c) FVF d) VVV e) VVF

2. El intervalo de frecuencias audible de un insecto es de 3 Hz a 30000 Hz. Considerando la velocidad del sonido 350 m/s, determinar los límites de las longitudes de onda del rango mencionado.

a) 0,011 mm < λ < 70 mm
b) 0,011 mm < λ < 70 mm
c) 0,011 m < λ < 7 m
d) 0,011 m < λ < 70 m
e) 0,11 m < 700 m

3.- En t = 0, un pulso de onda transversal en una cuerda se describe por medio de la función :

$y = \frac{2}{x^2+1}$, en unidades del S.I. escriba la función y(x,t) que represente esta onda si viaja con una velocidad **V** = -8**i** m/s.

a) $y_{(x,t)} = \frac{2}{(x+8t)}$

b) $y_{(x,t)} = \frac{1}{(x-8t)^2}$

c) $y_{(x,t)} = \frac{2}{(x-8t)^2+1}$

d) $y_{(x,t)} = \frac{2(-8t)}{(x+8t)^2+1}$

e) $y_{(x,t)} = \frac{2}{(x+8t)^2+1}$

4.- En la figura se muestra la fotografía instantánea de una onda transversal en una cuerda tensa. Que puntos de la cuerda se encuentran en fase.

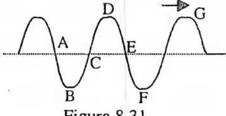


Figura 8.31

a) A y C b) D y F c) G y B d) E y A e) D y B

5.- Una cuerda uniforme tiene una masa de 24 kg. y una longitud de 8 m. calcule la velocidad de un pulso en esta cuerda (en m/s)

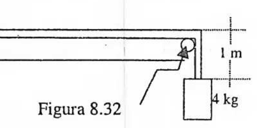


Figura 8.32

a) 4,8 b) 3.8 c) 1.8 d) 2.8 e) 5.8

6.- Una Onda de frecuencia 1000 c/s tiene una velocidad de fase de 250 m/s, que distancia hay entre dos puntos que tienen una diferencia de fase de 90° (en m)

a) 0.25 b) 0.0625 c) 0.125 d) 0.5 e) 0.0156

7.- Escribir la función de onda y(x,t) que avanza en el sentido positivo de las "X", con una frecuencia de 200 osc/s, una velocidad de 800 m/s y una amplitud de 50 cm.

a) $y = 0.5 \text{ sen } \pi\left(\frac{x}{2} - 400t\right)$

b) $y = 50 \text{ sen } \pi\left(\frac{x}{2} + 400t\right)$

c) $y = 0.5 \text{ sen } \pi\left(\frac{x}{4} - 400t\right)$

d) $y = 0,5 \text{ sen } \pi\left(\frac{x}{2} - 200t\right)$

e) $y = 0.05 \text{ sen } \pi\left(\frac{x}{4} - 400t\right)$

8.- Dada la función de onda $Z = 0,4 \text{ sen } 3\left(\frac{2\pi}{3}y - 4\pi t\right)$ en unidades del S.I. determine la velocidad transversal máxima de los puntos del medio material (en m/s).

a) 9.8 π b) 8.8 π c) 6.8 π d) 5.8 π e) 4.8 π

9.- A Una cuerda se le somete a una tensión de 200 N. ¿Cuánta potencia (en W) debe aplicarse a la cuerda para generar ondas senoidales de 100 Hz y una amplitud de 5 cm? si $\mu = 0.5$ kg/m.

a) 9935 b) 7935 c) 6934 d) 5934 e) 4935

10.- La Ecuación y(x,t) = 2 sen $\left(\frac{4\pi}{3}x\right)\cos(2t)$ en unidades del S.I. representa una onda estacionaria en una cuerda. Calcule la amplitud máxima de vibración y la longitud de onda del modo fundamental (en m).

a) 2 y 1.5
b) 1 y 3
c) 2 y 3
d) 1.5 y 1.5
e) 2 y 2,5

11.- La nota musical do mayor en un piano tiene una frecuencia fundamental de 300 Hz. Calcule la frecuencia del tercer armónico (en Hz)

a) 100 b) 200 c) 400 d) 900 e) 1200

12.- Un alambre estirado vibra en su modo fundamental a una frecuencia de 120 vibraciones /s ¿Cuál sería la frecuencia fundamental si el alambre tuviera el doble de longitud y el triple de la tensión? (en Hz)

a) 198 b) 104 c) 204 d) 208 e) 52

13.- Un tren de pasajeros tiene un silbato que desarrolla una potencia de $4\pi\mu$ W. Si el nivel mínimo aceptable es de 20 dB, determine la distancia que permite empezar a percibir auditivamente al tren. (en m)

a) 100 b) 500 c) 2000 d) 1000 e) 2000

14.- Un aviador situado a 3 m de un motor a reacción recibe un nivel de intensidad de 120 dB. ¿A qué distancia mínima (en km) de la fuente no oirá el sonido?.

a) 300 b) 30000 c) 3000 d) 30 e) 0.3

15.- Una fuente puntual emite ondas sonoras en todas direcciones, con una potencia de 100 W, ¿A qué distancia de la fuente su nivel de intensidad será de 120 dB? (en m).

a) 3.82 b) 1.82 c) 2.82 d) 4.82 e) 0.82

Capítulo



Fluidos

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos venido estudiando la mecánica de los sólidos, pero en general la materia se presenta en tres fases: sólido, líquido y gas, éstos dos últimos son los fluidos



Arquímedes en el momento histórico en que descubrió como medir la densidad de un cuerpo. Según cuenta la leyenda Arquímedes encontró la solución.. mientras se bañaba e inmediatamente echó a correr desnudo por las calles de Siracusa (Grecia) gritando ¡ Eureka ¡ que significa lo encontré

Los Fluidos son importantes en muchos aspectos de la vida cotidiana: los bebemos, los respiramos, nadamos en ellos, etc. y además los barcos y aviones se mueven en ellos.

En este capítulo analizaremos las condiciones bajo las cuales los fluidos están en reposo (esta rama de la física se llama Hidrostática), postergando para un curso superior el estudio de los fluidos en movimiento (Hidrodinámica).

9.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Fluido

El término fluido deviene de la capacidad de "Fluir" por parte de los líquidos y gases que si bien no tienen forma definida, presentan las siguientes características:.

Líquidos	Gases
Adopta la forma del recipiente que lo contiene	Ocupa todo el volumen del recipiente que lo contiene
Alta densidad e incompresible	Baja densidad y altamente compresible
Presenta superficie libre	No presenta superficie libre

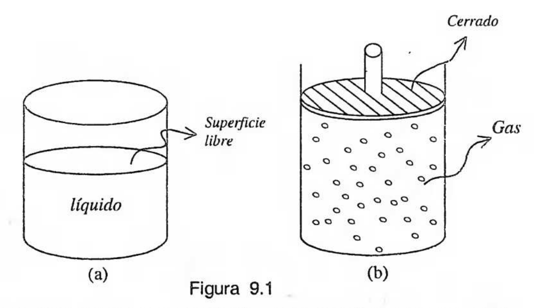


Figura 9.1

La figura 9.1a. comprueba que en el caso de los líquidos en reposo, se forma una superficie libre

La figura 9.1b. evidencia que en los gases en reposo no se forma superficie libre

En la figura el pistón puede subir o bajar, es decir el gas se puede expandir y comprimir respectivamente.

Asimismo, si tenemos, por decir, una botella que contiene un gas determinado, si se abre la botella, el gas sale y ocupa todo el volumen que le es disponible.

Densidad (ρ)

Es la masa de una sustancia dividido entre el volumen que ocupa

$$\rho = \frac{\textit{Masa de la sustancia}}{\textit{volumen que ocupa}}$$

$$\rho = \frac{m}{V} : \left[\frac{Kg}{m^3}\right] \ldots\ldots (1)$$

Si la sustancia es homogénea, tiene la misma densidad en todas sus partes. No así por ejemplo la atmósfera terrestre que es menos densa a mayor altura y más densa a menor altura, la atmósfera terrestre no es homogénea.

Ejemplo 1:

$$\rho_{agua} = 10^3 \text{ kg/m}^3 = 1 \text{ g/cm}^3$$

Tabla 9.1. :Densidades de algunas sustancias

Sustancia	(kg/m^3)
Agua	1000
Aluminio	2700
Acero	7800
Mercurio	13600
Aire (1 atm. 20°C)	1,20
Hielo	920
Oxígeno (0°C 1 atm.)	1,43

La densidad es un concepto válido para sólidos, líquidos y gases.

En general:

$\rho_{gases} << \rho_{líquidos}$

En la tabla comparar la densidad del agua con la del aire.

Densidad relativa (D_r)

Es la densidad de una sustancia comparada con la densidad del agua. Esta cantidad física no tiene unidades.

$$D_r = \frac{\textit{Densidad de la sustancia}}{\textit{Densidad del agua}} \quad ....(2)$$

Así tenemos para el mercurio:

$$Dr_{Hg} = \frac{13600}{1000} = 13,60$$

Presión (P)

Cuando caminamos en la nieve nos podemos hundir, pero si nos colocamos zapatos para la nieve que tienen una superficie mucho mayor, nos hundimos menos debido a que el peso de la persona se distribuye en un área mayor. Se observa que en ambos casos se trataba de la misma fuerza: el peso de la persona que actúa normal al área de sus zapatos. Inicialmente se hundía porque ejercía mayor fuerza normal por unidad de área (Presión P_1) que en el segundo caso donde hay menor fuerza normal por unidad de área (presión P_2).

$$P_2 < P_1.$$

La presión de una fuerza (F) sobre una superficie se define como la componente normal (F_N) de dicha fuerza entre el Area (A) de dicha superficie.

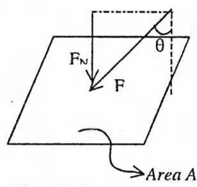


Figura 9.2

$$P = \frac{F_N}{A} : [\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}] \ldots\ldots..(3)$$

$$P = \frac{F\cos\theta}{A}$$

Unidades: en el S.I. es el pascal pascal = *Pa*

$$1\,Pa = 1\frac{N}{m^2}$$

La presión se ejerce sobre los sólidos, los líquidos y los gases y es una magnitud escalar.

Veremos el siguiente ejemplo:

Si a un bloque de masa *(m)* ubicada entre las superficies 1 y 2, se le aplica una fuerza *(F)*, las presiones P_1 y P_2 originadas por las normales N_1 y N_2 sobre la superficie 1 y 2 son:

$$P_1 = \frac{N_1}{A_1} \quad , \quad P_2 = \frac{N_2}{A_2}$$

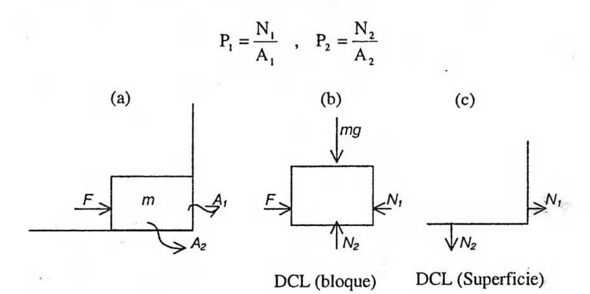


Figura 9.3

9.2 Presión debido a fluidos en reposo: Presión Hidrostática

En esta parte nos interesa la presión ejercida por fluidos en reposo. Las figuras muestran un líquido y un gas en reposo dentro de sendos depósitos, se observa que las flechitas son una representación de las fuerzas normales debido a estos fluidos que actuando sobre las paredes internas de los depósitos que los contienen originan presión.

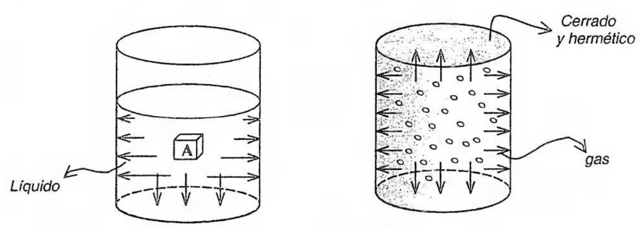


Figura 9.4

Si estudiamos la porción A del fluido líquido, observamos que debido a todo la masa de fluido que la rodea hay fuerzas que están actuando en sentido normal a esta porción de líquido.

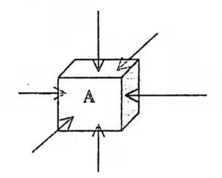


Figura 9.5

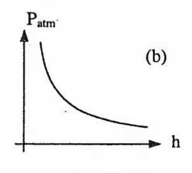
Presión Atmosférica

La tierra es rodeada por una capa de aire llamada atmósfera. Este aire tiene peso y actuando sobre la superficie terrestre origina la llamada Presión Atmosférica



(a)

La gráfica muestra la influencia de la atmósfera sobre la tierra, Donde las flechitas son las fuerzas originadas por el peso del aire distribuido sobre la superficie terrestre.



La Presión Atmosférica disminuye conforme aumenta *h*, siendo *h* la altitud. La Presión Atmosférica a nivel del mar no es la misma que en Huaraz (3100 m.s.n.m)

Figura 9.6

La Presión Atmosférica a nivel del mar es de 1 atm.

$$1\ atm = 1{,}013 \times 10^5\ Pa$$

9.3 Variación de la presión dentro de un fluido en reposo

Consideramos un líquido de densidad ρ en reposo contenido en un recipiente expuesto a la atmósfera como se muestra en la figura. Seleccionamos una porción de líquido homogéneo en forma de cilindro de sección transversal *A* que se extiende desde la superficie del líquido hasta una profundidad *h*.

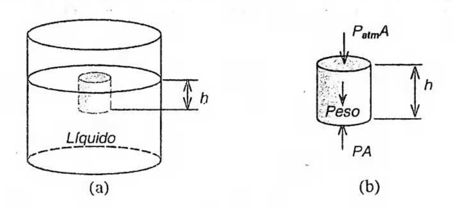


Figura 9.7

En la figura se muestra el Diagrama de Cuerpo Libre (*D.C.L.)*, de esa porción de fluido en donde, además del peso, las otras fuerzas son originadas por la presión atmosférica P_{atm} y la presión P del Fluido. Se entiende que las fuerzas laterales se equilibran mutuamente.

Por condición de equilibrio:

$\sum Fy = 0$ $\qquad PA - Peso - P_{atm}A = 0$

$$Peso = \rho g A h$$

Luego

$$P = P_{atm} + \rho g h$$

Donde P es la presión absoluta a la profundidad h

Siendo

$$\rho g h = P_{hidrostática}$$

La presión hidrostática es debido al peso de la columna de fluido.

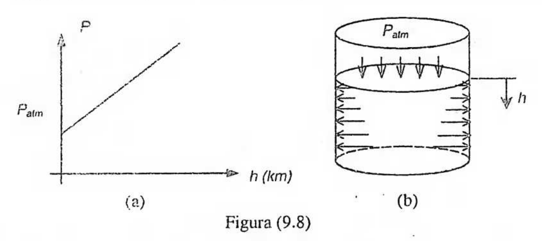


Figura (9.8)

Se muestra en la figura que la presión P aumenta con la profundidad h; esto lo pueden corroborar los buzos o cuando nos sumergimos en una piscina.

a) Variación de presión en un líquido

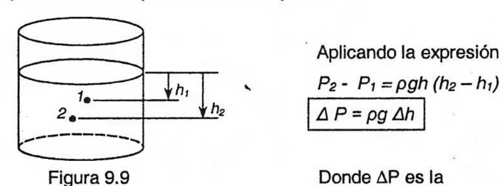


Figura 9.9

Aplicando la expresión

$P_2 - P_1 = \rho gh\,(h_2 - h_1)$

$\boxed{\Delta P = \rho g\,\Delta h}$

Donde ΔP es la diferencia de presiones en un líquido.

En la siguiente figura se observa que para puntos ubicados en un plano horizontal y en un mismo líquido estos tienen el mismo valor de presión.

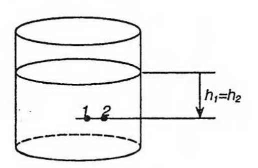


Figura 9.10

$h_1 = h_2$

$\Delta P = P_1 - P_2 = 0$

$P_1 = P_2$

Ejemplo 2:

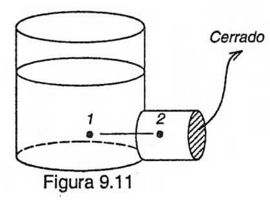


Figura 9.11

En el depósito de la figura que contiene agua $P_1 = P_2$, a pesar que sobre la zona 1 hay más cantidad de agua que en 2.

b) Variación de la presión en un gas

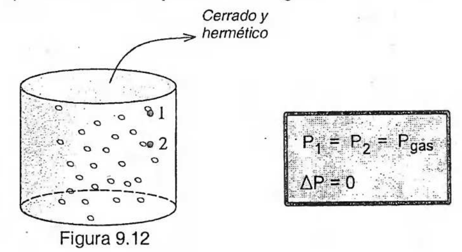
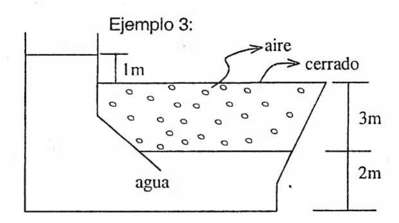


Figura 9.12

"La presión que ejerce un gas encerrado es la misma en todos los puntos, esto a pesar de estar a diferentes profundidades."

Ejemplo 3:



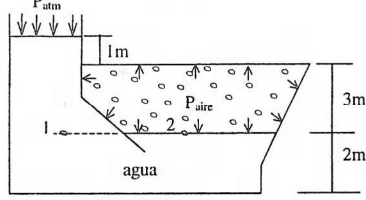
En el tanque mostrado, hallar la presión del aire encerrado.

$\rho_{agua} = 10^3$ kg/m^3 ,

$P_{atm} = 10^5$ P_a

Figura 9.13

SOLUCION



$P_1 = P_2$

"Puntos de un mismo fluido en reposo ubicados en un mismo plano horizontal tienen la misma presión"

Figura 9.14

$P_1 = P_{atm} + P_a$

$P_2 = P_{aire}$

$P_{aire} = 10^5 + 10^3(10)(4) = 10 \times 10^4 + 4 \times 10^4 = 14 \times 10^4\ P_a$

$P_{aire} = 140$ kP_a Es evidente que esta presión es absoluta.

9.4 Medida de la Presión

Fue la presión de la atmósfera, la primera de las presiones, medida por el hombre a través del experto de Torricelli, luego le seguirían los manómetros.

a) Experimento de Torricelli

Torricelli (1608-1647) fue el primero en darse cuenta que vivimos en el fondo de un océano de aire, supuso correctamente que la presión de la atmósfera se debe al peso del aire. La densidad del aire sobre la superficie terrestre es 1,29 kg/m^3. La densidad del aire disminuye al aumentar la altitud h.

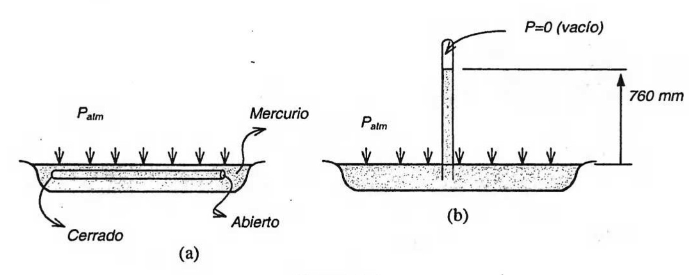


Figura 9.15

Cuando un tubo cerrado por un extremo y abierto por el otro se introduce en una cubeta que contiene mercurio y luego se le coloca verticalmente se observa que la columna de mercurio alcanza la altura de 760 mm lo que constituye un instrumento llamado barómetro de mercurio.

$$P_{atm} = 760 \text{ mm de mercurio}$$

b) **Manómetro de Tubo en U:**

Un tubo en U con su rama izquierda conectado al depósito donde se encuentra el fluido y cuya presión se quiere medir.

$$P_M = P_N = P_{GAS}$$

"Recuérdese que la presión es la misma en todos los puntos del GAS."

$$P_N = P_{atm} + \rho_{Hg}\, gh.$$

Usualmente se usa mercurio como líquido manométrico y además por ser de alta densidad.

$$\boxed{P_{GAS} = P_{atm} + \rho_{Hg}\, gh}$$

P_{atm} Gas h M N mercurio

Figura 9.16

Si el fluido es un líquido:

$$P_M = P_{líquido} + \rho_{líquido}\, gh_2$$

$$P_N = P_{atm} + \rho_{Hg}\, gh_1$$

$$P_{líquido} + \rho_{líquido}\, gh_2 = P_{atm} + \rho_{Hg} h_1$$

$$\boxed{P_{líquido} = P_{atm} + \rho_{Hg} gh_1 - \rho_{líquido}\, gh_2}$$

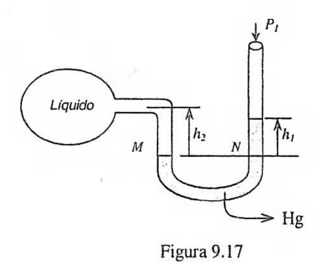


Figura 9.17

Observación: En ambas figuras las presiones del GAS y del LIQUIDO son mayores que la P_{atm}, pero puede ocurrir lo contrario en este caso se tendrían las figuras siguientes:

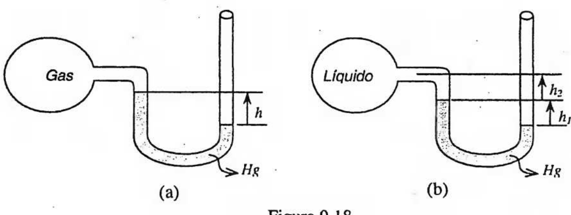


Figura 9.18

Queda para el alumno el hallar las presiones en ambos casos.

Observación:

El tubo en U se le usa a veces con 2 ó más líquidos no miscibles ambas ramas del tubo expuestos a la atmósfera. En la figura se muestran 2 líquidos 1 y 2 con densidades ρ_1 y ρ_2 respectivamente.

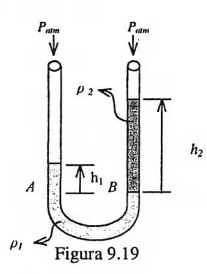


Figura 9.19

$P_A = P_B$ $\quad$ $P_A = P_{atm} + \rho_1 g h_1$

$P_B = P_{atm} + \rho_2 g h_2$

c) Usando MANÓMETRO: La lectura de todo MANÓMETRO es diferencia de presiones

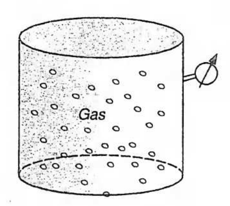


Figura 9.20

$$P_{man} = P_{GAS} - P_{atm}$$

$$P_{GAS} = P_{man} + P_{atm}$$

DONDE:

P_{man}: es la presión MANOMETRICA leída por el manómetro.

P_{GAS}: es la presión total o presión absoluta o verdadera del gas.

En la práctica se usan los manómetros de BOURDON como por ejemplo en tanques de oxígeno, en tanques de acetileno que usan los soldadores, además se usan en tanques de aire comprimido como los que están instalados en los grifos y que los automovilistas usan para medir la presión del aire contenido en las llantas.

9.5 Vasos Comunicantes

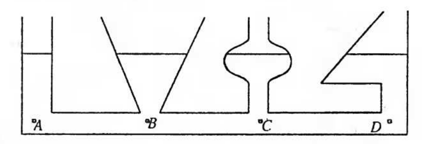


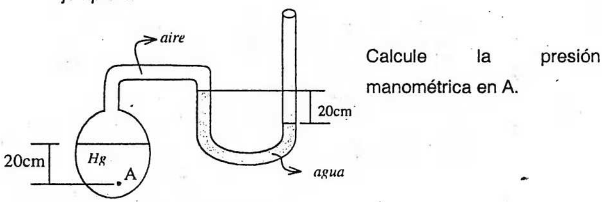
Figura 9.21

Se muestran varios depósitos interconectados entre sí, observando que en todos ellos el nivel alcanzado de líquido es el mismo.

$$P_A = P_B = P_C = P_D$$

En la práctica esto es usado por los albañiles que usan una manguera para medir niveles. Los reservorios de agua en centros poblados se colocan en partes altas para que por el efecto de VASOS COMUNICANTES lleguen a las partes altas de las casas.

Ejemplo 4:



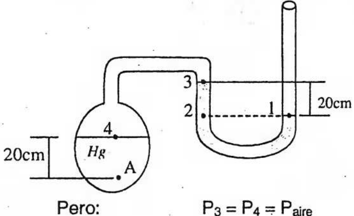
Calcule la presión manométrica en A.

Figura 9.22

SOLUCION:

Definimos 1, 2, 3, 4

Se observa que: $P_1 = P_{atm}$



$P_2 = P_1$

$P_2 = P_3 + \rho_{agua}\, g\ (0,2)$

Pero: $P_3 = P_4 = P_{aire}$ "En un gas la presión es la misma en todos los puntos"

Figura 9.23

Luego: $P_{atm} = P_1 = P_2 = P_3 + \rho_{agua}\, g(0,2) = P_{aire} + \rho_{agua}\, g(0,2)$

$P_{atm} = P_{aire} + 10^3\ (10)\ (0,2)$

$10^5 = P_{aire} + 10^3\ (10)\ (0,2)$.........(1)

Además: $P_A = P_4 + \rho_{Hg}\ \rho\ (0,2)$

$P_A = P_{aire} + \rho_{Hg}\ \rho\ (0,2)$.............(2)

De (1) y (2) obtenemos: $P_A = 12,52 \times 10^4\ P_a = 125,2\ KP_a$

9.6 Principio de Pascal

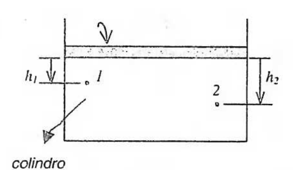


Figura 9.24

Consideremos un fluido encerrado en un sistema cilindro-pistón, las presiones en los puntos 1, y 2 son:

$P_1 = P_{atm} + \rho g h_1 + mg/A$

m: masa del pistón

A: Area del pistón

$P_2 = P_{atm} + \rho g h_2 + mg/A$

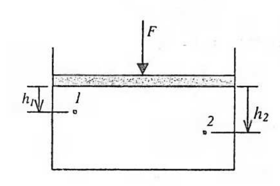


Figura 9.25

Cuando aplicamos F las nuevas presiones son:

$$P'_1 = P_{atm} + \rho g h_1 + \frac{mg}{A} + \frac{F}{A}$$

$$P'_2 = P_{atm} + \rho g h_2 + \frac{mg}{A} + \frac{F}{A}$$

$$\Delta P_1 = P'_1 - P_1 = \frac{F}{A}$$

$$\Delta P_2 = P'_2 - P_2 = \frac{F}{A}$$

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 = \Delta P$$

"Toda variación de presión ΔP en un fluido encerrado se transmite íntegramente a todos los puntos del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene."

El Científico Francés Blaise Pascal (1623-1662) fue quien enunció este principio.

APLICACIONES:

Todos los equipos de movimiento de tierra, cargadores frontales, palas mecánicas, etc. y además los mecanismos llamados Hidráulicos hacen valer este principio.



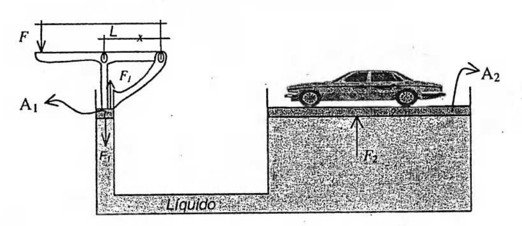


Figura 9.26

En la figura se aplica la fuerza F sobre la palanca

$$FL = F_1x \qquad\qquad F_1 = \frac{FL}{x}$$

Luego F_1, origina la variación de presión en el líquido $\Delta P_1 = \dfrac{F_1}{A_1}$

Donde A_1 es el área del pistón 1.

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 = \frac{F_2}{A_2} \text{ (Principio de Pascal)}$$

Como $A_2 >> A_1$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad\qquad F_2 = F_1\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$$

$F_2 >> F_1$

Como el área A_2 es mucho mayor que el área A_1 entonces F_2 será mucho mayor que F_1.

F_2 puede servir para levantar cargas tan pesadas como las de un auto, camión, etc.

Ejemplo 5: El recipiente mostrado está en el plano horizontal (Vista superior)

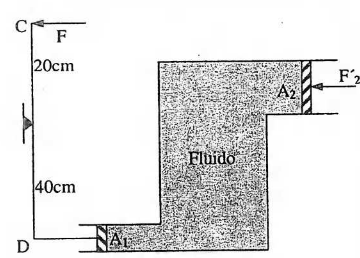


Figura 9.27

Hallar F'_2 para conservar el equilibrio.

$A_2 = 100\ A_1$

Las barras son de masa despreciable. Considere que la presión es constante en A_2 y A_1

SOLUCION

Planteamos el D.C.L.

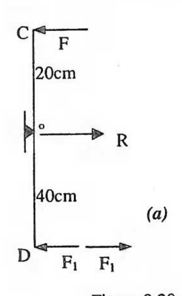


Figura 9.28

Aplicando el principio de Pascal

F_2 F'_2

$$\Delta P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

F_1

(b)

$$F_2 = \frac{A_1}{A_2} F_1 \quad ....(2)$$

$\Sigma \vec{t_o} = 0 \qquad F(20) = F_1(40)$

$F_1 = F/2 \ .....\ (1)$

De (1) y (2)

$F_2 = 100\ (F/2) = 50\ F$

$\Sigma F_x = 0$

Luego : $F'_2 = F_2 = 50\ F$

9.7 Principio de Arquímedes

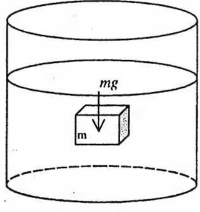


Figura 9.29

Observemos la siguiente figura.

Nos formulamos la siguiente pregunta:

¿Qué fuerza contrarrestaría el peso del bloque sumergido que se encuentra en equilibrio?

Arquímedes (287-212 A.C.) respondió a esta interrogante con su principio:

"Todo cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido sufre una fuerza vertical hacia arriba llamada EMPUJE e igual al peso del fluido que desaloja o que desplaza."

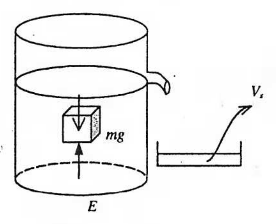


Figura 9.30

E = peso del fluido desalojado = $\rho g V_s$

V_s = Volumen desalojado = V_D = Volumen desplazado

Además en la figura

$$mg = E$$

Asimismo en este caso

V_s = Volumen del cuerpo

OTRO CASO: Si flota con una fracción sumergida y la otra parte encima de la superficie:

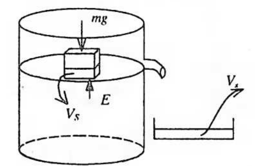


Figura 9.31

E = peso fluido desalojado = $\rho g V_s$
Solamente que en este caso el volumen desplazado V_s es una fracción del volumen del cuerpo.

En cuanto al origen de esta fuerza vertical llamada empuje, esta es debido a todas las fuerzas que el fluido ejerce sobre el cuerpo.

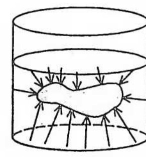


Figura 9.32

Estas fuerzas son mayores en la superficie inferior del cuerpo que en la superficie superior, debido a que en dichos puntos por estar a mayor profundidad la presión hidrostática es mayor.

Observe en la figura que :

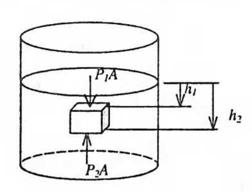


Figura 9.33

$E = P_2A - P_1A$

$E = (P_2 - P_1)A$

$E = \Delta PA \qquad \Delta P = (h_2 - h_1)\rho g$

$E = \rho g \Delta h A$

$E = \rho g V_s$

APLICACIONES

- El Principio de Arquímedes permite explicar por qué 1 TN de acero se hunde en el agua de mar pero si se le da la forma de un barco no se hunde, esto es debido al volumen desplazado.

- Un submarino puede sumergirse o salir a la superficie inundando o vaciando los tanques de lastre con lo cual varía su densidad media

- En un globo aerostático se cumple el principio de Arquímedes.

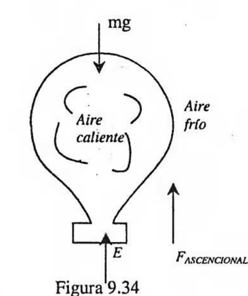
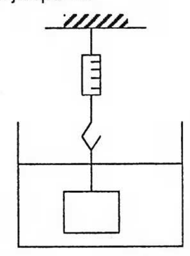


Figura 9.34

$F_{ASCENCIONAL} = E - mg$

El empuje E es debido al volumen desplazado del aire frío.

Ejemplo 6:


Figura 9.35

El dinamómetro de la figura registra 20 N. Si el cuerpo tiene un volumen de 10^{-3} m^3 y está sumergido en agua, hallar la densidad del material del cuerpo

SOLUCIÓN

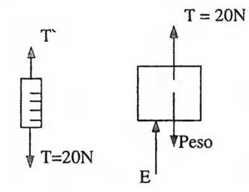


Figura 9.36

Planteando el D.C.L. del dinamómetro y del cuerpo.

$\Sigma Fy = 0$

$E + T = Peso$

$E + 20 = \rho g V$ ...... (1)

Donde E es la fuerza de empuje que proporciona el agua al cuerpo

Por el principio de Arquímedes: $E = \rho_{agua}\, g\, V_s = \rho_{agua} V$

Remplazando en (1)

$$\rho_{agua}\, g\, V + 20 = \rho\, g\, V$$

$$10^3 (10)(10)^{-3} + 20 = \rho (10)(10^{-3})$$

$$\rho = 3x10^3 = 3000 \text{ kg/m}^3$$

Ejemplo 7

Determine el tiempo que demora la bolita de 50 g y 200 cm^3 en emerger a la superficie si parte del reposo. Desprecie la fricción.

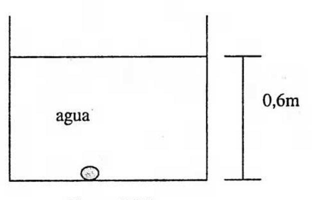


Figura 9.37

Solución

Por cinemática : $0{,}6 = V_o t + ½ a t^2$, $V_o = 0$

$0{,}6 = ½ a t^2$ . . . . . . (1)

Por la segunda ley de Newton :

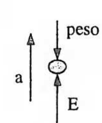


Figura 9.38

$\Sigma Fy = ma \qquad E - peso = ma$

$\rho_{agua}\, g\, V - peso = ma$

$10^3\,(10)(200x10^{-6}) - 50x10^{-3}(10) = 50x10^{-3}\,a$

$2000 \times 10^{-3} - 500 \times 10^{-3} = 50 \times 10^{-3}\,a$

$a = 30\ m/s^2$

Reemplazando en (1) y despejando el tiempo t :

$t = 0{,}2\ s$

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1

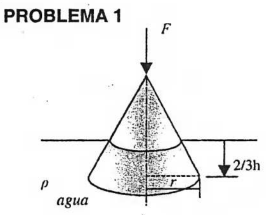


Figura 9.39

Hallar la fuerza F para que el cono macizo quede sumergido como se ve en la figura; h es la altura del cono y su radio r es $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}\,m$,

ρ_c es la densidad del material del cono

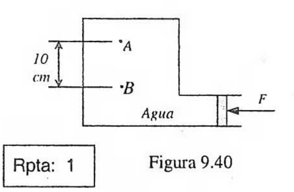
Rpta: $gh\left(\frac{8}{3}\rho - 3\,\rho_C\right)$

PROBLEMA 2

4 kg de agua se introduce en un depósito de 2 kg y todo el conjunto se coloca sobre una balanza dando esta una lectura N_1. Enseguida se introduce al depósito un cuerpo de 3 kg y $10^3\ cm^3$ de volumen que se sumerge completamente dentro del agua, en este caso la lectura de la balanza es N_2. Se pide la densidad ρ del cuerpo y la relación N_1 / N_2.

Rpta: $\rho = 3000\ kg/m^3$, $\frac{N_1}{N_2} = \frac{2}{3}$

PROBLEMA 3



Rpta: 1

Figura 9.40

Inicialmente antes de aplicar F la presión en B es de $1,2 \times 10^5$ Pa. Determine $P_B - P_A$ (en unidades de 10^3) luego de aplicar $F=200$ N siendo el área del pistón de 40 cm^2.

PROBLEMA 4

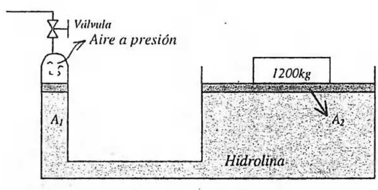


Figura 9.41

Despiécese las masas de los pistones

Antes de abrir la válvula, el sistema se encontraba en equilibrio, luego de abrir la válvula entra aire, calcular la presión de ese aire adicional que entra que hace levantar la carga de 1200 kg

$A_2 = 100\ A_1 = 600$ cm^2

Rpta: 2×10^5 Pa

PROBLEMA 5

Se tiene un sólido homogéneo de la forma mostrada. Este sólido ejerce una presión P_1 sobre una plataforma cuando está en la posición mostrada y una presión P_2 cuando se le invierte. Hallar P_1 / P_2.

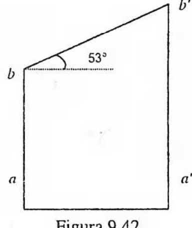


Figura 9.42

Rpta: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{3}$

PROBLEMA 6

Un barco se está hundiendo lentamente como se muestra en la figura. Qué presión hidrostática (en P_a) soporta una persona en t = 0.

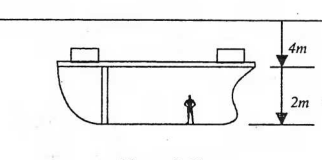


Figura 9.43

Para t = 0, la posición del barco es el de la figura y la persona esta rodeada de agua.

$\rho_{H2O}^{(mar)} = 1,3 \text{ g/cm}^3$

Rpta: 78×10^3 Pa

PROBLEMA 7

A una cañería de aire a presión de un laboratorio se le trató de medir su presión manométrica y para esto el gas se le llevó a través de una manguera de 2 m de longitud a un tubo en "L" que contenía mercurio. ¿Qué presión manométrica tenía el aire, si el nivel del mercurio estàba sobre 40 cm del aire comprimido?

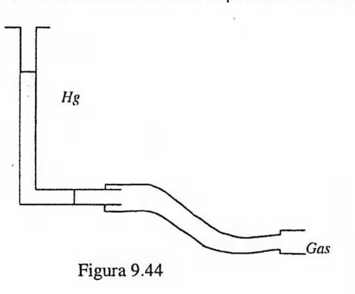


Figura 9.44

Rpta: $P = 54,4 \times 10^3\ P_a$

PROBLEMA 8

Se tiene un tubo en U y se vierte un líquido en una de las ramas. Después se vierte un aceite de densidad ρ_a en uno de los extremos, hasta una altura h_a. ¿Cuál es la diferencia de alturas de los niveles que ha generado el aceite sobre el líquido?

Rpta: $\Delta h = h_a \left(\dfrac{\rho_a}{\rho_{H_2O}} \right)$

PROBLEMA 9

Si las dimensiones de su sala en su segundo piso son 4 m x 5 m y 2,2 m de altura y la presión atmosférica $P_0 = 10^5$ Pa ¿Cuál es la fuerza que ejerce el aire en el piso de su segundo piso y en las paredes? Si esta fuerza es bien grande ¿Porqué no se rompe el piso y las paredes?

Rpta: $F_{piso} = 2 \times 10^6$ N
$F_{paredes} = 8,8 \times 10^5$ N y 11×10^5 N

PROBLEMA 10

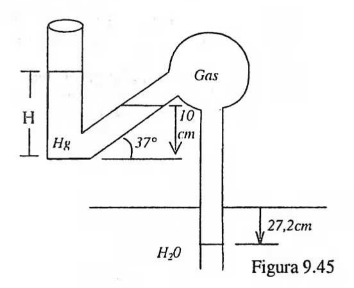


Figura 9.45

Un tubo contiene gas comprimido entre dos líquidos; agua y mercurio como se muestra en la figura. Hallar la altura "H" del mercurio, si los datos están en el gráfico.

Rpta: H = 12 cm

Capítulo 10

Física Térmica

INTRODUCCIÓN

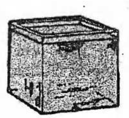
En este capítulo se estudiarán los conceptos de temperatura y calor que nos ayudarán a entender lo concerniente al calentamiento y al enfriamiento. Inicialmente el enfoque dado será para objetos macroscópicos y luego adoptaremos una perspectiva microscópica, la de los átomos y moléculas y observaremos que la descripción macroscópica y microscópica están fuertemente ligadas. Todo ello nos servirá para el estudio de las transformaciones de energía, que implican calor, trabajo mecánico y otras formas de energía, y la relación de estas transformaciones con las propiedades de la materia, constituyéndose así este capítulo en parte indispensable de la física, teniendo mucha aplicación como por ejemplo en los motores de combustión interna, en los refrigeradores, en los acondicionadores de aire, etc.

10.1 TEMPERATURA

Nuestra primera aproximación al concepto de temperatura, es a través de la sensación de caliente o frío que sentimos al tocar un objeto. Esta sensación nos permite distinguir entre un cuerpo caliente y otro frío.

Por otro lado, observamos que un cuerpo caliente tal como un cubo lleno de agua hirviendo, se enfría en contacto con la atmósfera, mientras que un cubo de hielo se derrite en contacto con la misma atmósfera. Esta experiencia nos enseña que la tendencia natural de los cuerpos en contacto, es alcanzar la misma temperatura.

AGUA
100°C



HIELO
0°C



Fig. 10.1 Proceso de calentamiento o enfriamiento en la atmósfera

De esta forma es fácil darse cuenta que los procesos de calentamiento o enfriamiento, se deben a un intercambio energético entre cuerpos puestos en contacto, pues si estuvieran aislados, su temperatura se mantendría constante.

Dichos intercambios energéticos, ocurren cuando los cuerpos están a diferente temperatura, y son iguales cuando la temperatura de los dos cuerpos se iguala, y entonces decimos que los cuerpos han alcanzado el equilibrio térmico. La energía neta cedida de un cuerpo a otro debido a una diferencia de temperaturas se denomina calor.

Podemos definir entonces a la temperatura como ***aquella propiedad de un cuerpo, que en forma espontánea, se iguala a la de otro cuerpo cuando es puesto en contacto térmico con él.***

El concepto de temperatura se deriva de la idea de medir el calentamiento o frialdad de los cuerpos y de la observación de que el suministro o extracción de calor, bajo ciertas condiciones, implica una variación de la temperatura.
El calor fluye del cuerpo más caliente al más frío hasta que sus temperaturas se igualan, por tanto, los términos de temperatura y calor, aunque relacionados entre sí, se refieren a conceptos diferentes. La temperatura es una propiedad de los cuerpos y el calor es un flujo de energía entre cuerpos que tienen diferente temperatura.

PRINCIPIO CERO DE LA TERMODINÁMICA

Como ya hemos visto, cuando dos cuerpos están en equilibrio térmico tienen la misma temperatura. Este hecho aparentemente poco importante, dio lugar a que en forma tardía fuera enunciada una ley llamada principio cero de la termodinámica, el cual dice que:

"Si dos cuerpos distintos están en equilibrio térmico con uno tercero, también tienen que estar en equilibrio térmico entre sí"

La Ley Cero fue enunciada luego de la Primera y Segunda Ley, sin embargo su orden lógico era anterior, por lo que se la denominó con el nombre de ***cero***.

MEDICIÓN DE LA TEMPERATURA

La sensación térmica no es una buena referencia para medir la temperatura de un cuerpo, porque puede resultar engañosa. Por ejemplo, si tocamos un trozo de metal y luego uno de madera, el de metal nos parecerá mas frío, a pesar que los dos pueden estar a la misma temperatura. Si sostenemos un trozo de hielo con una mano y una taza de café caliente con la otra, y luego tocamos un mismo objeto con las dos manos, el objeto nos parecerá caliente al tocarlo con la mano fría y nos parecerá frío al tocarlo con la mano caliente.
Por tanto, en lugar de medir la temperatura con el tacto, se debe medir la temperatura de los cuerpos comparándola con la temperatura de un cuerpo patrón cuya temperatura sea fija, conocida, y fácilmente reproducible. Esta sustancia patrón suele ser una cierta cantidad de agua en su punto de congelación o ebullición.
Sin embargo, el problema de medir temperaturas no está resuelto por completo, pues por comparación sólo podríamos determinar si la temperatura de un cuerpo es

igual o no a la temperatura del agua congelándose o hirviente. No tendríamos forma de determinar el valor de la temperatura si no diéramos a los puntos fijos de referencia ciertos valores numéricos y estableciéramos una escala de temperaturas. Para hacer más sencilla la tarea, existen instrumentos para medir temperatura cuyo funcionamiento se basa en la llamada Ley Cero de la Termodinámica.
En la figura 10.2 se puede ver que el tercer cuerpo mencionado en la ley cero es el termómetro, pues de acuerdo a esta ley sí el cuerpo cuya temperatura se está midiendo (cuerpo A), está en equilibrio térmico con el termómetro (cuerpo B), está también en equilibro térmico con la muestra patrón (cuerpo C).

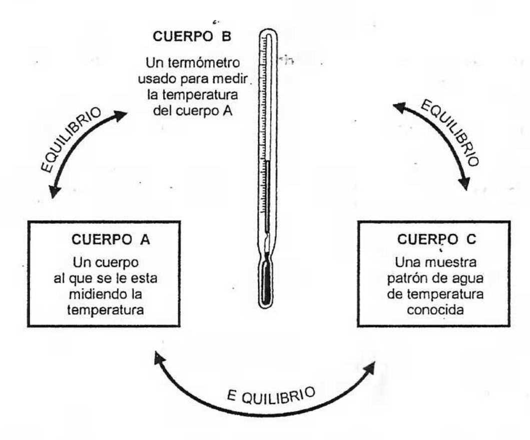


Fig. 10.2 Ley cero de la Termodinámica es el fundamento de la medición de la temperatura

Se entiende que cuando el cuerpo A de la figura 10.2 se pone en contacto con el termómetro, le entregará una cierta cantidad de calor que depende de la masa del termómetro, por esto la masa del termómetro debe ser considerablemente más pequeña que la masa del cuerpo A para que la entrega de calor sea pequeña y no afecte apreciablemente la temperatura que se está midiendo. Recuerde esto y coméntelo más adelante cuando se vea el concepto de *capacidad calorífica*.

ESCALAS DE TEMPERATURA

Una escala se define dando valores a los puntos fijos de referencia de la sustancia patrón elegida, estableciendo con esto una unidad de medida y un cero relativo. Esta sustancia patrón es el agua, elegida por ser una sustancia ampliamente disponible y cuyos puntos de congelación y ebullición a la presión de 1 atmósfera,

tomados como puntos de referencia, son cercanos a las temperaturas comúnmente manejadas en la vida diaria.

La escala centígrada o Celsius, ideada por el astrónomo sueco Anders Celsius y utilizada en casi todo el mundo, asigna un valor 0 °C al punto de congelación del agua pura y 100 °C a su punto de ebullición. De esta forma, la unidad de medida de temperatura en esta escala (el °C) es la 1/100 parte de la diferencia de temperaturas entre el punto de congelación y el punto de ebullición del agua.

Otra escala de temperatura, todavía empleada en los países anglosajones, fue diseñada por el físico alemán Gabriel Daniel Fahrenheit. Según esta escala el 0 °C corresponde a 32 °F y los 100 °C corresponden a 212 °F. De esta forma, la unidad de medida de la temperatura en esta escala (el °F), es la 1/180 parte de la diferencia de temperaturas entre el punto de congelación y el punto de ebullición del agua.

El Sistema Internacional establece la escala Kelvin como escala de medida de la temperatura, propuesta por el matemático y físico británico William Thomson, lord Kelvin. En esta escala, el cero absoluto (cero kelvin) corresponde a -273,15 °C y una diferencia de un kelvin equivale a una diferencia de un grado en la escala centígrada.

La figura 10.3 muestra la relación entre las diferentes escalas de temperatura, incluyendo una escala arbitraria X.

Se puede convertir una temperatura, de una escala a otra, conociendo la equivalencia de temperaturas para los puntos fijos de referencia y usando la siguiente expresión:

$$\frac{°C}{100} = \frac{K-273}{100} = \frac{°F-32}{180} = \frac{X-a}{b-a}$$

°C	K	°F	R	°X
C	K	F	R	X
100	373	212	672	b
0	273	32	492	a
		0	460	
- 273	0	- 460	0	

Fig. 10.3 Relación entre las escalas de temperatura

TERMÓMETROS

Los Termómetros son instrumentos empleados para medir la temperatura. Los cambios de temperatura se miden a partir de cambios en las propiedades de una sustancia llamada *"sustancia termométrica"*. Por ejemplo, en un termómetro de mercurio, la sustancia termométrica es el mercurio, y se mide la dilatación de la columna de mercurio que está relacionada con el cambio de temperatura.
El termómetro de mercurio es el más utilizado, y está formado por un capilar de vidrio de diámetro uniforme comunicado por un extremo con una ampolla llena de mercurio. El conjunto está sellado para mantener un vacío parcial en el capilar. Cuando la temperatura aumenta, el mercurio se dilata y asciende por el capilar. La temperatura se puede leer en una escala situada junto al capilar.

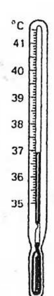


Fig.10.4 Termómetro de mercurio

El termómetro de mercurio, mostrado en la figura 10.4, es muy utilizado para medir temperaturas ordinarias.

La invención del termómetro se atribuye a Galileo, aunque el termómetro sellado no apareció hasta 1650. Los modernos termómetros de alcohol y mercurio fueron inventados por el físico alemán Daniel Gabriel Fahrenheit, quien también propuso la primera escala de temperaturas que lleva su nombre.

La escala del termómetro se graba sobre el vidrio, calibrando la longitud de la columna de mercurio primero con agua en su punto de congelación, y luego en su punto de ebullición, dividiendo la distancia entre estas dos marcas en partes iguales cada una de las cuales corresponde a un grado.

Cuando la columna de un termómetro de mercurio alcanza una altura de 40 grados por ejemplo, se supone que está en equilibrio con una mezcla de hielo y agua hirviendo preparada de tal forma que su temperatura sea de 40 grados.

10.2 DILATACIÓN

Los cambios de temperatura pueden afectar de forma importante las propiedades de los materiales. A temperaturas muy bajas por ejemplo, el acero se vuelve quebradizo y se rompe fácilmente, y los líquidos se solidifican o se hacen muy viscosos ofreciendo una elevada resistencia al flujo.
Otro efecto importante de la temperatura es la llamada dilatación de los cuerpos. La dilatación es el aumento del tamaño de los materiales por efecto del aumento de temperatura, en particular de cuerpos sólidos y líquidos, ya que los gases tienen un comportamiento muy especial que se estudia aparte.
Para un sólido en forma de barra larga, el aumento en su longitud está determinado experimentalmente por su coeficiente de dilatación lineal (α), que es el cambio relativo de longitud por unidad de temperatura.

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_0} \circ \frac{1}{\Delta T} : [1/^{\circ}C = 1/K]$$

De la expresión anterior se obtiene la longitud final de la barra mediante la siguiente ecuación:

$$L_f = L_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

Donde L_0 es la longitud inicial de la barra, L_f es la longitud final, α es el coeficiente de dilatación lineal, y ΔT es el cambio de temperatura $(T_f - T_0)$.

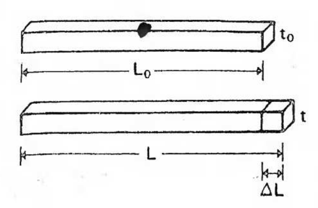


Fig. 10.5 Barra larga dilatada por efecto del calor

Los valores de los coeficientes de dilatación para algunos materiales puede encontrarse en la siguiente tabla:

Coeficientes de dilatación para algunos materiales (Valores promedios entre 0 y 100 °C)

SUSTANCIA	COEFICIENTE DE DILATACIÓN LINEAL (/ °C)
Porcelana	3×10^{-6}
Vidrio	$4 - 9 \times 10^{-6}$
Acero o Hierro	12×10^{-6}
Oro	14×10^{-6}
Cobre	17×10^{-6}
Latón	18×10^{-6}
Aluminio	24×10^{-6}
Cinc	29×10^{-6}

Tabla 10.1

De la tabla, el coeficiente de dilatación lineal del acero es de 12×10^{-6} /°C, por lo que sí se calienta un grado una barra de acero de 1 m, se dilatará 0,012 mm. Esto puede parecer muy poco, pero el efecto es proporcional, por

lo que una viga de acero de 10 m calentada 20 grados se dilata 2,4 mm, una cantidad que ya debe tenerse en cuenta en trabajos de ingeniería.
También se puede hablar de coeficiente de dilatación superficial de un sólido, cuando dos de sus dimensiones son mucho mayores que la tercera, y de coeficiente de dilatación volumétrica, cuando sus tres dimensiones son importantes. Las expresiones para el calculo del área final y el volumen final son similares a las usadas para calcular la longitud dilatada de una barra.

$$A_f = A_0 (1+\beta \Delta T) \qquad V_f = V_0 (1+\gamma \Delta T)$$

Donde $\beta = 2\alpha$ es el coeficiente de dilatación superficial y $\gamma = 3\alpha$ es el coeficiente de dilatación volumétrica, para valores de temperatura dentro del rango de indicado en la tabla 10.1

10.3 CALOR

Hasta principios del siglo XIX, el efecto del calor sobre la temperatura de un cuerpo se explicaba postulando la existencia de una sustancia invisible denominada calórico. Según la teoría del calórico, un cuerpo de alta temperatura contiene más calórico que otro de baja temperatura; el primero cede parte de su calórico al segundo cuando se pone en contacto con él, con lo que disminuye su temperatura y aumenta la del otro.

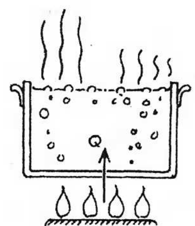


Fig. 10.6 Calor (energía que pasa del fuego al agua y del agua a la atmósfera)

Aunque la teoría del calórico explicaba algunos fenómenos de la transferencia de calor, las pruebas experimentales presentadas por el físico británico Benjamín Thompson en 1798, sugerían que el calor, igual que el trabajo, es energía en tránsito. Entre 1840 y 1849, el físico británico James Prescott Joule, en una serie de experimentos muy precisos, demostró que el calor es uno de los mecanismos por los que se transfiere energía, y que puede causar los mismos efectos que el trabajo.
Joule observó que al hacer girar una rueda de paletas en un recipiente cerrado conteniendo agua, la temperatura de esta se eleva, y el incremento de temperatura es proporcional al trabajo realizado al mover la rueda de paletas (ver la figura 10.7).

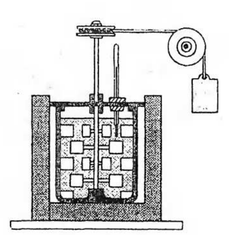


Fig. 10.7 experimento de Joule

Unidades de calor

La cantidad de calor se expresa en las mismas unidades que la energía y el trabajo, es decir, en joule. Otra unidad es la caloría, definida como la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 1 gramo de agua a 1 atmósfera de presión desde 14,5 °C a 15,5 °C.
La energía mecánica se puede convertir en calor, por ejemplo a través del rozamiento, y el trabajo mecánico necesario para producir 1 caloría se conoce como equivalente mecánico del calor.

$$1 \text{ cal} = 4{,}18 \text{ J}$$

10.4 CAPACIDAD CALORÍFICA Y CALOR ESPECÍFICO

La *capacidad calorífica* (*C*) es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de un cuerpo en un grado.

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \quad : \quad [\text{J/K}]$$

La capacidad calorífica de una sustancia depende de la masa de la sustancia en cuestión, por lo que no se puede hablar de la capacidad calorífica como una propiedad característica de cada material, siendo necesario expresarla por unidad de masa, con el nombre de *calor específico* (*c*).

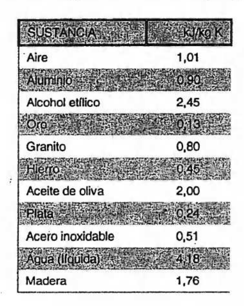
$$c = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m\,\Delta T} \quad : \quad [\text{J/kg K}]$$

Hay que observar que comúnmente se usa las unidades [kJ/kg K].
De la expresión anterior se puede calcular el calor cedido o absorbido por un cuerpo con la ecuación:

$$Q = m\,c\,\Delta T$$

La siguiente tabla muestra los calores específicos de varias sustancias.

Calor específico de algunos sólidos y líquidos (a 25 °C)



SUSTANCIA	kJ/kg K
Aire	1,01
Aluminio	0,90
Alcohol etílico	2,45
Oro	0,13
Granito	0,80
Hierro	0,45
Aceite de oliva	2,00
Plata	0,24
Acero inoxidable	0,51
Agua (líquida)	4,18
Madera	1,76

Tabla 10.2

En el caso de los sólidos y líquidos, debido a que mantienen su volumen prácticamente constante con la presión, el calor específico es único, pero en el caso de los gases, debido a la gran variación del volumen con la presión, hacen falta más calorías para aumentar la temperatura si se expande un gas mientras se le suministra calor, que si se suministra el calor manteniendo volumen constante, porque parte de la energía suministrada se consume en el trabajo de expansión del gas. Esto obliga a definir dos calores específicos para los gases, uno a presión constante y otro a volumen constante.

CALORIMETRO

Para determinar el calor específico de un cuerpo se usa un recipiente con paredes aisladas térmicamente denominado calorímetro, como el mostrado en la siguiente figura.

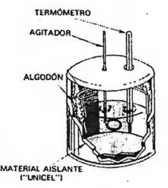


Fig. 10.8 Calorímetro típico

Cuando se coloca dos o más sustancias en un calorímetro, la energía térmica dentro del recipiente se mantiene constante.

$$\sum Q_i = 0$$

Donde: $Q_i = m_i c_i (T_f - T_{0i})$ y T_{0i} es la temperatura inicial de los cuerpos.

10.5 CALOR LATENTE

Además de los procesos de transmisión de calor que aumentan o disminuyen la temperatura de los cuerpos, la transmisión de calor también puede producir cambios de fase, como la fusión del hielo o la ebullición del agua. La materia puede presentarse bajo tres formas o fases: sólido, líquido o gas.

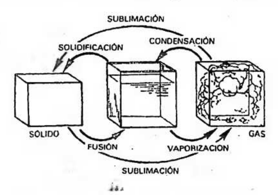


Fig. 10.9 Fases de la materia

La temperatura a la que se da el cambio de fase es característica de las sustancias para cada presión. La siguiente tabla muestra la temperatura de cambio de fase para algunas sustancias.

Puntos de fusión y ebullición

SUSTANCIA	PUNTO DE EBULLICIÓN (ºC)	PUNTO DE FUSIÓN (ºC)
Hidrógeno	-253	-259
Nitrógeno	-196	-210
Oxígeno	-183	-218
Acetona	56	-95
Metanol	65	-98
Etanol	78	-114
Agua	100	0
Glicerina	290	18
Mercurio	357	-39
Cinc	907	420
Plomo	1 740	328
Estaño	2 260	232
Aluminio	2 467	660
Cobre	2 567	1 083
Hierro	2 750	1 535
Titanio	3 287	1 660
Vanadio	3 380	1 890
Volframio	5 660	3 410

Tabla 10.3

La cantidad de calor Q necesaria para producir un cambio de fase por unidad de masa, se llama calor latente (L), y existen calores latentes de sublimación, fusión y vaporización.

$$L = \frac{Q}{m} \quad : \quad [J/kg]$$

Si suministramos calor a una sustancia sólida en su punto de fusión, la temperatura de la sustancia permanecerá constante hasta la licuación total, ya que el calor entregado sólo aporta la energía necesaria para que las moléculas de la sustancia venzan sus fuerzas de cohesión y se produzca el cambio de fase, no quedando energía para provocar el aumento de temperatura. Por esta razón, este calor recibe el nombre de *calor latente de fusión* (L_f).
Del mismo modo, si se entrega calor a una sustancia líquida en su punto de ebullición, la sustancia permanecerá a la misma temperatura hasta su evaporación total, pues el calor entregado a la sustancia sólo aporta la energía necesaria para que las moléculas venzan sus fuerzas de cohesión y se independicen totalmente unas de otras, produciéndose el cambio de fase de líquido a vapor. Así pues, éste calor recibe el nombre de *calor latente de vaporización* (L_v).

La siguiente tabla muestra los calores latentes de fusión y vaporización para algunas sustancias:

Calores latentes (kJ/kg)

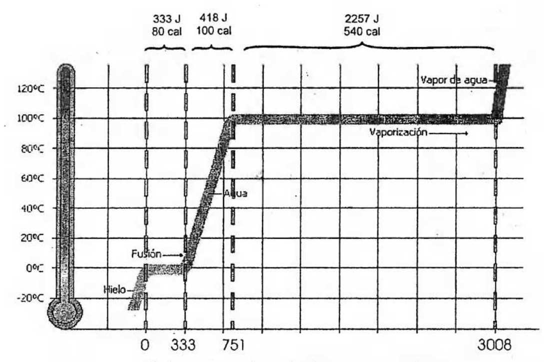
SUSTANCIA	Lf	LV
Hidrogeno	58,6	452
Oxigeno	13,8	213
Mercurio	11,3	296
Agua	333	2 260
Plomo	24,7	858
Plata	105	2 336
Cobre	205	4 730

Tabla 10.4

De esta forma, la temperatura de fusión de una sustancia pura puede definirse como la temperatura a la que coexisten en equilibrio, partes sólidas y líquidas de dicha sustancia. Igualmente, la temperatura de ebullición de una sustancia pura puede definirse como la temperatura a la que coexisten en equilibrio, partes líquidas y de vapor de dicha sustancia.

Por ejemplo, si se hierve agua en un recipiente abierto a la presión de una atmósfera, la temperatura no aumenta por encima de los 100 °C por mucho calor que se suministre. El calor que absorbe la sustancia sin cambiar su temperatura, no se pierde, sino que se emplea en transformar el agua en vapor y se almacena como energía interna. Cuando el vapor se condensa para formar agua, esta energía vuelve a liberarse.

Del mismo modo, si se suministra calor a una masa de hielo de agua a una atmósfera y 0 °C, su temperatura no cambia hasta que se funde todo el hielo. El calor absorbido se emplea para vencer las fuerzas que mantienen unidas las moléculas de hielo, almacenándose como energía interna en el agua.



Calor entregado en joule por gramo de agua

Fig. 10.10 Grafica Calor vs Temperatura de 1 g de agua

Para fundir 1 g de hielo se necesitan 333 joule, y para convertir 1 g de agua en vapor a 100 °C, hacen falta 2260 joule. La figura 10.10 muestra el proceso de cambio de fase de una sustancia pura en donde se aprecia la variación de la temperatura en función del calor entregado a la sustancia.

EJEMPLO

Un vaso de vidrio con una masa de 30g contiene 300 ml de agua a 30ºC. Si se colocan dos cubos de hielo a 0ºC, cada uno con una masa de 25g, en este vaso, ¿cuál será aproximadamente la temperatura final (en ºC) del agua en el vaso?. El calor específico del vidrio es de 0,15 cal/gºC

SOLUCION

Q_G Q_P

0ºC T 30ºC

Por conservación de la energía: $Q_G + Q_P = 0$

$$2(25)(80) + (1)(50)(1)(T) + 0{,}15(30)(T-30) + (1)(300)(T-30) = 0 \Rightarrow T \approx 14.5^{\circ}C$$

10.6 PROPAGACIÓN DEL CALOR

Los mecanismos físicos por los que se produce la transferencia de calor son la ***conducción,*** la ***radiación*** y la ***convección***.
La conducción requiere contacto físico entre los cuerpos o las partes de un cuerpo que intercambian calor, pero en la radiación no hace falta que los cuerpos estén en contacto, ni que haya materia entre ellos.
La convección es un mecanismo especial que requiere el movimiento de un líquido o un gas, en contacto con un cuerpo de temperatura diferente.
Aunque estos tres procesos pueden tener lugar simultáneamente, puede ocurrir que uno de ellos predomine sobre los otros dos, por ejemplo, el calor se transmite a través de la pared de una casa fundamentalmente por conducción, el agua de una olla sobre una cocina de gas se calienta en gran medida por convección, y la Tierra recibe calor del Sol exclusivamente por radiación.

CONDUCCIÓN

La única forma de transferencia de calor en los sólidos, es la conducción. Si se calienta el extremo de una varilla metálica de forma que aumente su temperatura, el calor se transmite hasta el extremo más frío por conducción.



Fig. 10.11 Propagación de calor por conducción

El flujo de calor a través de un cuerpo es directamente proporcional al área de la sección recta (*A*) y al gradiente de temperatura existente ($\Delta T/L$), e inversamente. El factor de proporcionalidad (*K*) se denomina conductividad térmica del material y la expresión que permite evaluar el calor transferido por conducción, por unidad de tiempo, es:

$$H = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{-K\,A\,\Delta T}{L}$$

Los materiales como el oro, la plata, o el cobre, tienen conductividades térmicas elevadas y conducen bien el calor, mientras que materiales como el vidrio o el amianto tienen conductividades cientos e incluso miles de veces menores; conducen muy mal el calor, y se conocen como aislantes térmicos.
Cuando el flujo de calor *H* varía con el tiempo, se habla de conducción térmica en régimen transitorio, y en caso contrario, si *H* es constante en el tiempo, se habla de conducción térmica en régimen permanente o estacionario. En este texto se plantea problemas de conducción de calor sólo en régimen permanente.
En un proceso estacionario, la temperatura a una distancia X de un cuerpo caliente de temperatura T_1 esta dada por la función:

$$T(X) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L} X$$

Donde T_2 es una temperatura conocida, a una distancia L del cuerpo caliente.

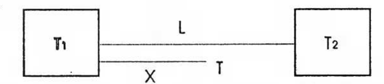


Fig. 10.12 Flujo de calor en régimen estacionario

CONVECCIÓN

Si existe una diferencia de temperatura en el interior de un líquido o un gas, es casi seguro que se producirá movimiento del fluido. Este movimiento transfiere calor de una parte del fluido a otra, por un proceso llamado convección.
El movimiento del fluido puede ser natural o forzado. Si se calienta un líquido o un gas, la porción más caliente y menos densa asciende, mientras que la porción más fría y más densa desciende; este tipo de movimiento debido a la diferencia de densidades generada por una diferencia de temperaturas en el fluido, se denomina convección natural. La convección forzada se logra moviendo el fluido por la acción de un agente externo como puede ser una bomba.

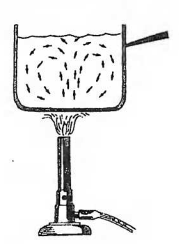


Fig. 10.13 Convección en una olla con agua

En la cacerola llena de agua de la figura 10.13, el líquido más próximo al fondo se calienta por el calor que se ha transmitido por conducción a través del metal, luego, al dilatarse el agua, su densidad disminuye, y como resultado de ello el agua caliente asciende y el agua fría baja hacia el fondo iniciándose un movimiento de circulación.

La convección determina el movimiento de las grandes masas de aire sobre la superficie terrestre, formando los vientos y moviendo las nubes, y en los mares determina las corrientes oceánicas.

RADIACIÓN

La radiación presenta una diferencia fundamental respecto a la conducción y la convección: las sustancias que intercambian calor no tienen que estar en contacto, sino que pueden estar separadas por un vacío.
En 1900 el físico alemán Max Planck descubrió la ley fundamental de la radiación, y puede demostrarse a partir de esta ley, que el poder emisor de un cuerpo de superficie (A) es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta (T). El factor de proporcionalidad (σ) se denomina constante de Stefan-Boltzmann en honor a dos físicos austriacos, Joseph Stefan y Ludwig Boltzmann, que en 1879 y 1884 respectivamente, descubrieron esta proporcionalidad entre el poder emisor de un cuerpo y su temperatura.
De esta forma, el calor transferido por radiación, por unidad de tiempo, se puede calcular como:

$$H=\frac{Q}{\Delta t}=e\sigma A T^{4}$$

Donde e es un factor denominado ***emisividad***, que depende de las características del material y $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W/m^2K^4$
Se muestra en la figura 7.14 que los cuerpos oscuros absorben mayor radiación debido precisamente a esta característica.
Según la ley de Planck, todas las sustancias emiten energía radiante sólo por el hecho de tener una temperatura superior al cero absoluto. Cuanto mayor es la temperatura, mayor es la cantidad de energía emitida.
Además de emitir radiación, todas las sustancias son capaces de absorberla, por eso, un cubito de hielo que en él vació emite energía radiante en forma continua, se funde si simplemente se lo ilumina con una lámpara, porque absorbe una cantidad de calor mayor de la que emite.
Las superficies opacas pueden absorber o reflejar la radiación incidente, y generalmente las superficies mates y rugosas absorben más calor radiante que las superficies brillantes y pulidas. Además, las sustancias que absorben mucha radiación también son buenas emisoras; y las que reflejan mucha radiación y absorben poco son malas emisoras; por esto las ollas de cocina suelen tener externamente fondos mates para una buena absorción y paredes laterales pulidas para una emisión mínima, con lo que maximizan la transferencia de calor al contenido.

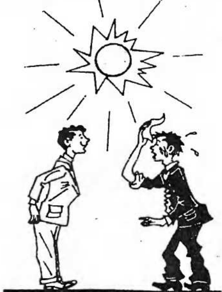


Figura 10.14 Radiación en diferentes cuerpos

PROBLEMAS

Prob 1.- Indique cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuales son falsas (F)

- La temperatura es una manifestación del calor contenido en un cuerpo
- La capacidad calorífica es una propiedad de las sustancias
- Una sustancia puede recibir calor sin variar su temperatura
- La escala Fahrenheit es una escala absoluta

a) FVVF b) VVVV c) VFVV d) FFVF e) FFVV

Prob 2.- Una plancha metálica cuadrada de 2,5 m de lado, tiene un agujero central de $\pi/4$ m^2 de área. Si el agujero experimenta un incremento de área de 0,001 π m^2 debido a un incremento de la temperatura de la plancha de 100 °C, calcule el incremento de la longitud del lado de la plancha en mm.

a) 2,5 b) 3,5 c) 4,0 d) 5,0 e) 7,0

Prob 3.- Una bola de hierro de 6 cm de diámetro se encuentra sobre el agujero central de una plancha horizontal de bronce, y no puede pasar por el agujero debido a que su diámetro es 0,01 mm más grande que el diámetro del agujero. Si la temperatura inicial es de 30 °C, ¿a qué temperatura hay que calentar el conjunto bola plancha para que para que la bola pase ajuntada por el agujero?

a) 34 b) 44 c) 54 d) 64 e) 74

Prob 4.- Se vierte 7 kg de un metal fundido a su temperatura de fusión de 1000 °C, en 20 kg de agua a 20 °C. Si se observa que el agua hierve y se vaporizan 10 kg, determine el calor latente de fusión del metal en cal/g, si se sabe además que el calor específico del metal es de 0,8 cal/g °C

a) 160 b) 200 c) 240 d) 280 e) 320

Prob 5.- En un gran bloque de hielo a 0°C, se hace una cavidad y se vierte dentro 500 g de plomo fundido a 327 °C. Si se sabe que el calor latente de fusión del plomo es 5,9 cal/g, su temperatura de fusión es de 600 K, y el calor específico del plomo sólido es de 0,0305 cal/g °C, determine en gramos aproximadamente la masa de hielo que se funde.

a) 59 b) 69 c) 79 d) 89 e) 99

Prob 6.- Si las densidades del hielo y del aluminio son 0,9 y 3,7 g/cm^3 respectivamente ¿hasta qué temperatura en K aproximadamente habrá que calentar un cubo de aluminio para que al colocarlo sobre un gran trozo de hielo a 0 °C, se sumerja totalmente?. Considere que el calor específico del aluminio es de 880 J/kg K.

a) 100 b) 359 c) 400 d) 553 e) 228

10.7 COMPORTAMIENTO TERMICO DE LOS GASES IDEALES

Para describir el comportamiento de una masa gaseosa, es conveniente tener información acerca del volumen que ocupa, así como, de su presión y su temperatura. Es difícil expresar en una ecuación la relación entre la presión, el volumen y la temperatura de una cantidad cualquiera de gas. Sólo cuando la densidad (o presión) de los gases reales es baja es posible sintetizar los resultados experimentales en tres leyes: la ley de Boyle-Mariotte, la ley de Charles –Gay Lussac, y la ley de Avogadro. Estas tres leyes, sin embargo, sólo son casos particulares del comportamiento de los gases en estas condiciones (baja densidad y baja presión); el cual está gobernado por la ecuación de estado del gas ideal.

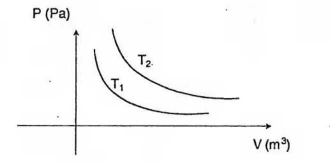
Ley de Boyle - Mariotte: A temperatura constante, el volúmen V ocupado por una masa gaseosa es inversamente proporcional a la presión ejercida sobre él, es decir:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

Ley de Charles - Gay Lussac: A presión constante, el volumen ocupado por una masa de gas es directamente proporcional a su temperatura.

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Las leyes experimentales de Boyle – Mariotte y Charles - Gay Lussac pueden ser expresadas en los siguientes gráficos



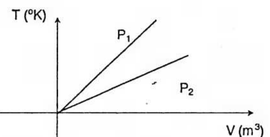


Fig 10.15 a) Variación de la presión en función del volumen para una masa gaseosa a temperatura constante. ($T_2 > T_1$)

Fig 10.15 b) Variación de la temperatura en función del volumen para una masa gaseosa a presión constante. ($P_1 > P_2$)

Ley de Avogadro: Volúmenes iguales de diferentes gases a la misma temperatura y la misma presión contienen el mismo número de moléculas.

Ecuación de estado del gas ideal:
Las tres leyes anteriores pueden ser sintetizadas por una sola ecuación

$$PV = n\ R\ T$$

ó

$$PV = N\ k_B\ T,$$

donde, n es el número de moles, N es el número de moléculas, k_B se llama constante de Boltzmann y R es la constante universal de los gases.

$$k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\ \frac{J}{\text{molécula}\ \ K}, \quad R = 8{,}31\ \text{J/mol K}$$

Recapitulando, podemos decir que, un **gas ideal es aquel que obedece la ecuación** PV = nRT, y que los gases reales obedecen esta ley sólo cuando su densidad es muy pequeña.

Ejemplo 01: Un gas ocupa un volumen de 4 ℓ a una temperatura de 30^0 C y una presión de 1 atm. se calienta a 60^0 C y se comprime hasta un volumen de 3 ℓ. hallar su nueva presión.

SOLUCION:

$$\frac{P_o V_o}{T_o} = \frac{P_f V_f}{T_f} \Rightarrow P_f = P_o \frac{V_o}{V_f} \frac{T_f}{T_o}$$

$$P_f = (1)\frac{4}{3}\ \frac{273+60}{273+30}\ \text{atm} = 1.47\ \text{atm}$$

Ejemplo 02: Un recipiente de 50 ℓ contiene 64 gramos de O_2 a una presión de una atmósfera. (a) Hallar la temperatura. (b) Si aumentamos el volumen hasta 80 ℓ y mantenemos constante la temperatura, ¿cuál será la nueva presión?

SOLUCION:

$V = 50\ell = 50 \circ 10^{-3}\ m^3$

$M = 64g$ de $O_2 \Rightarrow n = \frac{m}{M} = 2$ mol

$P = 1atm \rightarrow P = 101 \circ 10^3$ Pa

a) $PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR} = 303.9$ k

b) $P_fV_f = P_oV_o \Rightarrow P_f = P_o\frac{V_o}{V_f} = (1)\ \frac{50}{80}$ atm

$= 0.625$ atm

10.8 TEORIA CINETICA DE GASES IDEALES

La teoría cinética de gases estudia la relación de las propiedades macroscópicas de los gases tales como presión, volumen y temperatura con las propiedades microscópicas tales como velocidad y energía de las moléculas que conforman un gas.
Las moléculas de un gas son partículas de volumen despreciable con velocidades al azar, en promedio, puede decirse que el vector velocidad es cero.
El promedio de la velocidad al cuadrado, sin embargo, no es cero.

$$v_x^2 = 1/3\, v^2$$

En cada choque una partícula entrega a una de las paredes del cubo perpendicular al eje x una cantidad de movimiento o impulso

$$\Delta p = 2 m v_x$$

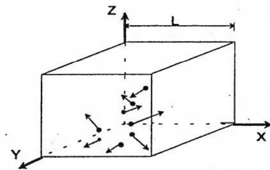


Figura 10.16

El tiempo entre choque y choque es

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$$

la fuerza sobre la cara del cubo debido a una molécula será

$$f = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\, v_x^2}{L}$$

y debido a todas las moléculas será

$$F = \frac{N\, m\, (v_x^2)_{prom}}{L} = \frac{N m (v^2)_{prom}}{3\, L}$$

La presión sobre la cara

$$P = \frac{F}{L^2} = \frac{N\, m\, (v^2)_{prom}}{3\, V}$$

$$K_B\, T = \frac{1}{3}\, m\, (v^2)_{prom}$$

La energía cinética promedio es entonces:

$$(EC)_{prom} = \frac{3}{2} K_B T$$

Se define velocidad cuadrática media por la expresión:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3 K_B T}{m}} \quad ó \quad v_{rms} = \sqrt{\frac{3\, R T}{M}}$$

Ejemplo 03: ¿Cuál es la velocidad cuadrática media de las moléculas de a) oxígeno, b) Hidrógeno, en un recipiente a 300 K y a la presión de una atmósfera?

SOLUCION:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3\,R\,T}{M}}$$

a) Para el oxígeno: $v_{rms} = \sqrt{\frac{3 * 8.31 * 300}{32 * 10^{-3}}} = 483.4$ m/s

b) Para el hidrógeno: $v_{rms} = \sqrt{\frac{3 * 8.31 * 300}{2 * 10^{-3}}} = 1933.8$ m/s

10.9 ENERGÍA INTERNA DE UN GAS IDEAL:

La energía interna de un cuerpo se define como la suma de las energías de todos los átomos y/o moléculas que conforman el cuerpo.

Si asumimos que los gases reales monoatómicos (He, Ne, Xe, etc) se comportan como gases ideales (gases ideales monoatómicos), la energía cinética traslacional será la unica energía interna del gas; en ese caso diremos que para la energía interna está dada por cualquuiera de las siguientes ecuaciones.

$$U = \frac{3}{2} N\,K_B\,T$$

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

$$U = \frac{3}{2} P\,V$$

Si aproximamos los gases diatómicos reales (O_2, H_2, N_2, etc) al concepto de gas ideal, debemos tener en cuenta que las moléculas de los gases diatómicos, además de desplazarse a grandes velocidades, rotan con respecto a los dos ejes perpendiculares al eje que une a los dos átomos otro. Esto significa que la energía interna de una gas ideal diatómico está constituida además de la energía cinética por una energía cinética de rotación. El resultado es que para gases ideales diatómicos la energía interna está dada por cualquiera de las siguientes ecuaciones.

$$U = \frac{5}{2} N\,K_B\,T$$

$$U = \frac{5}{2} nRT$$

$$U = \frac{5}{2} P\,V$$

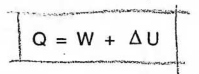
10.10 PRIMERA LEY DE LA TERMODINAMICA

Antes de enunciar la primera ley de la termodinámica, es conveniente precisar el concepto de sistema termodinámico.

En Física, un sistema es simplemente un cuerpo o conjunto de cuerpos que aislamos, imaginariamente o mediante un esquema, para analizar su comportamiento en determinados fenómenos físicos. En termodinámica conviene precisar el concepto de ***sistema termodinámico*** como una cantidad de materia limitada por una superficie cerrada. Si el sistema es un bloque de cobre, la superficie es simplemente la del bloque. El sistema pudiera ser un gas, o un gas y un líquido, contenido en un cilindro provisto de un pistón móvil. El tamaño y la superficie envolvente puede cambiar, pero nada de materia debe atravesar su contorno.

Enunciado de la primera ley:

El calor cedido a un sistema es igual a la suma del incremento de la energía interna más el trabajo hecho por el cuerpo



$$Q = W + \Delta U$$

Convención de signos: $Q > 0$, si el sistema recibe calor.

$W > 0$, si el sistema hace trabajo sobre el medio exterior, si el sistema se expande.

La primera ley de la termodinámica es general y se aplica a sistemas que involucran líquidos, gases y sólidos, pero es particularmente simple e instructivo aplicar esta ley a sistemas de gases ideales y eso es lo que haremos a continuación.

PROCESOS TERMODINÁMICOS SIMPLES SOBRE GASES IDEALES

A continuación aplicaremos la primera ley de la termodinámica a diferentes procesos simples y cíclicos. Consideraremos cuatro tipos de procesos simples: isobárico, isócoro, isotérmico y adiabático. Los procesos cíclicos que consideraremos son combinaciones de los procesos simples mencionados.

Para precisar diremos que un proceso es un conjunto de cambios que llevan a un sistema termodinámico de un estado (P_1, V_1, T_1) a otro estado (P_2, V_2, T_2). Asumiremos que durante este proceso el sistema siempre pasa por estados (P, V, T) de equilibrio ($PV = nRT$). A este tipo de procesos se les llama cuasiestáticos. También consideramos que el sistema puede regresar del estado (P_2, V_2, T_2) al estado (P_1,V_1, T_1) a través de un conjunto de estados de equilibrio. Decimos que estos procesos son reversibles.

Proceso Isobárico (a presión constante)

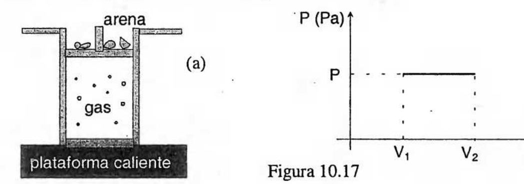


Figura 10.17

Si el gas ideal contenido en el recipiente de la figura 10.17(a) recibe calor, la presión sobre el émbolo ejercerá una fuerza sobre éste. En cada instante la fuerza sobre el émbolo será $F = P A$. Si se coloca algún peso (como algunos granos de arena) en la parte externa del émbolo de modo que pueda desplazarse, pero que la presión se mantenga constante, entonces, al desplazarse el émbolo una longitud x, el gas hará sobre el exterior un trabajo

$$W = P(V_2 - V_1)$$

Este trabajo queda representado por el área del rectángulo de lados P y $(V_2 - V_1)$ en la figura 10.17(b).

Si el gas es monoatómico, el incremento en la energía interna será:

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2} P(V_2 - V_1)$$

La primera ley de la termodinámica nos permite decir que el calor recibido por el cuerpo es:

$$Q = \frac{5}{2} P(V_2 - V_1) \quad \text{ó} \quad Q = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1)$$

Si el gas es diatómico:

$$\Delta U = \frac{5}{2} P(V_2 - V_1)$$

y por lo tanto

$$Q = \frac{7}{2} P(V_2 - V_1) \quad \text{ó} \quad Q = \frac{7}{2} nR(T_2 - T_1)$$

Capacidad calorífica molar a presión constante:

Se define como el calor necesario para elevar la temperatura de un mol en un grado centígrado. Para incrementar la temperatura de n moles en ΔT se necesita la cantidad de calor

$$Q = n\, C_P\, \Delta T$$

Comparando esta ecuación con las ecuaciones anteriores, podemos decir que:

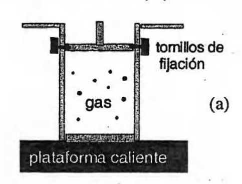
Para gases monoatómicos :

$$C_p = 5/2\ R$$

y para gases diatómicos

$$C_p = 7/2\ R$$

Procesos Isócoros (o procesos a volumen constante)



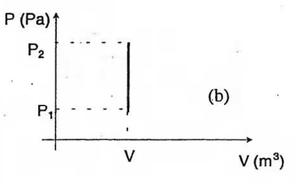


Figura 10.18

Cuando un gas recibe calor y se mantiene constante el volumen, no hace trabajo.

$$W = 0$$

en este caso el cambio de energía interna es

$$\Delta U = \frac{3}{2} V\ (P_2 - p_1)$$

para un gas monoatómico y

$$\Delta U = \frac{5}{2} V\ (P_2 - p_1)$$

para un gas diatómico.

La primera ley de la termodinámica nos permite decir entonces que el calor recibido por un gas monoatómico durante este proceso es

$$\Delta Q = \frac{3}{2} V\ (P_2 - P_1) \quad \text{ó} \quad \Delta Q = \frac{3}{2}\, nR(T_2 - T_1)$$

y para un gas diatómico

$$\Delta Q = \frac{5}{2} V(P_2 - P_1) \quad \text{ó} \quad \Delta Q = \frac{5}{2}\, nR(T_2 - T_1)$$

Capacidad calorífica a volumen constante

Se define como el calor por mol que es necesario entregar a un gas para elevar su temperatura en un grado centígrado, es decir,

$$\Delta Q = n\ C_V\ \Delta T$$

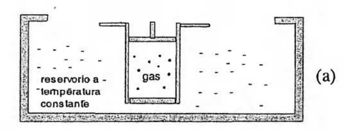
Para gases monoatómicos

$$C_V = \frac{3}{2}R$$

y para gases diatómicos

$$C_V = \frac{5}{2}R$$

PROCESOS ISOTÉRMICOS O PROCESOS A TEMPERATURA CONSTANTE



(a) (b)

Figura 10.19

En un proceso a temperatura constante, la energía interna del gas no varía

$$\Delta U = 0$$

y por lo tanto, la primera ley de la termodinámica nos permite afirmar que:

$$Q = W$$

Todo el calor recibido por un sistema a temperatura constante se convierte en trabajo.

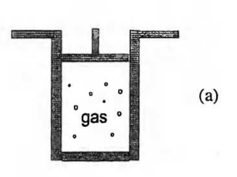
El trabajo se puede calcular, evaluando el área bajo la curva P vs V; aquí sólo mostramos el resultado de este cálculo:

$$W = nRT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 2{,}3\ nRT\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

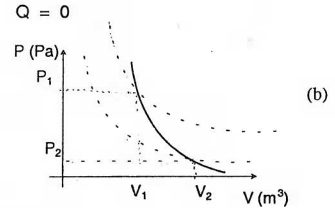
Procesos Adiabáticos (o procesos sin intercambio de calor)

Son procesos en los que el sistema no intercambia calor con el medio externo, es decir,

$$Q = 0$$



(a)



(b)

Figura 10.20

y por lo tanto la primera ley de la termodinámica nos dice que

$$W = \Delta U$$

Puede demostrarse analíticamente y verificarse experimentalmente que cuando en un recipiente de material aislante térmico se tiene una cantidad de gas y ésta se somete a cambios cuasiestáticos de presión entonces la relación P vs V es:

$$P V^{\gamma} = Cte$$

donde $\gamma = C_p/C_V$.

De esta ecuación por un proceso que implica el cálculo del área puede demostrarse que el trabajo en un proceso adiabático viene dado por la expresión:

$$W = \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{\gamma - 1}$$

EJEMPLO

Un gas es comprimido manteniendo su presión constante igual a $5 \cdot 10^4$ N/m^2, desde un volumen inicial de $3 \cdot 10^{-3}$ m^3 hasta un volumen final de $1.5 \cdot 10^{-3}$ m^3. Si el gas liberó 100 J de calor en este proceso, determinar la variación de su energía interna.

SOLUCION:

$$W = P\Delta V = -75 \text{ J} \;;\; Q = -100\text{J} \;\Rightarrow\; \Delta U = Q - W = -25 \text{ J}$$

PROCESOS CICLICOS

Un proceso termodinámico durante el cual el sistema pasa por sucesivos estados de equilibrio y regresa al estado inicial se llama procesos cíclico.

Las figuras 10.21 a, b y c muestran tres ejemplos de procesos cíclicos

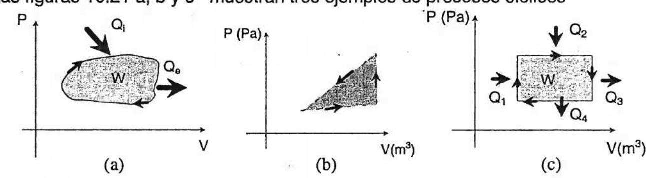


Figura 10.21

OBSERVAR QUE EL PROCESO REPRESENTADO EN LA FIGURA C. ESTÁ CONSTITUIDO POR DOS PROCESOS TERMODINÁMICOS ISOBÁRICOS Y DOS ISÓCOROS. SE DICE QUE ES UN PROCESO ISÓCORO-ISOBÁRICO.

EFICIENCIA DE UN PROCESO CÍCLICO:

La eficiencia de un proceso cíclico se define como la razón entre el trabajo hecho por un sistema y la cantidad de calor que ingresa a éste.

$$\xi = \frac{W}{Qi}$$

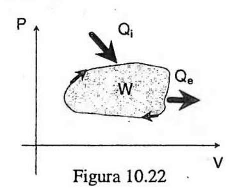


Figura 10.22

Ejemplo: Calcular la eficiencia del ciclo isócoro-isobárico de la figura, considerando que el proceso se realiza sobre un gas ideal a) monoatómico y b) diatómico.

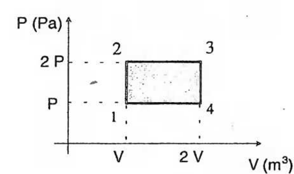


Figura 10.23

Rpta: 2/13

SOLUCION

a) Monoatómico

$$Q_{12} = \frac{3}{2}PV$$

$$Q_{23} = \frac{5}{2}(2P)V$$

$$Q_{13} = Q_{12} + Q_{23} = \frac{13}{2}PV$$

$$\varepsilon = \frac{PV}{Q_{13}} = \frac{PV}{\frac{13}{2}PV} = \frac{2}{13} \cong 0{,}154 = 15{,}4\%$$

b) Diatómico

$$\varepsilon = \frac{2}{19} = 10{,}5\%$$

10.11 CICLO DE CARNOT:

El ciclo de Carnot está constituido por dos procesos isotérmicos y dos procesos adiabáticos. La figura muestra el gráfico P vs V y el esquema de cada proceso simple que constituye el ciclo. El sistema absorbe calor Q_1 de un reservorio caliente a temperatura T_1 durante la expansión isotérmica ab. Entrega calor a un reservorio frío, a temperatura T_2 . El trabajo neto hecho por el sistema en cada ciclo.es representada por el área encerrada en el gráfico P vs V.

Puede demostrarse que la eficiencia de un ciclo de carnot está dada por

$$\xi = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

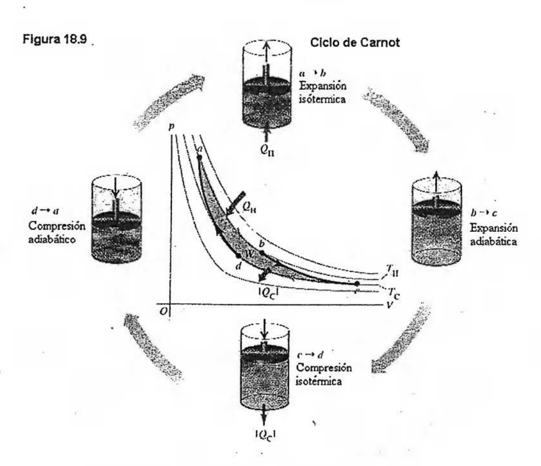


Figura 10.24 El ciclo de Carnot

El ciclo de Carnot es de particular importancia en termodinámica porque es el ciclo de máxima eficiencia.

MÁQUINAS TÉRMICAS SON DISPOSITIVOS FABRICADOS PARA TRANSFORMAR CALOR EN TRABAJO.

Ejemplos: La máquina de vapor y el motor diesel

Los procesos que ocurren en algunas máquinas térmicas pueden aproximarse a procesos cíclicos basados en los procesos simples ya estudiados. Por ejemplo: el motor Diesel puede aproximarse a un proceso que consta de un isobarico, dos adiabáticos y un isócoro

De esta manera es posible calcular analíticamente la eficiencia de una máquina térmica.

Representación esquemática y eficiencia de una máquina térmica

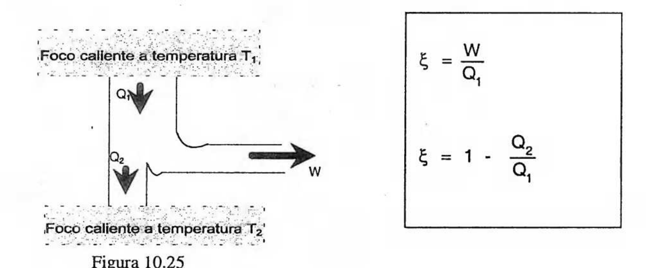


Figura 10.25

10.12 SEGUNDA LEY DE LA TERMODINAMICA

Reparemos por un momento en la observación cotidiana de que al poner un cuerpo caliente en contacto con un cuerpo frío el calor fluye del cuerpo caliente al frío. La posibilidad de que el calor fluya de un cuerpo frío a uno caliente también está permitido por la primera ley de la termodinámica, pero nunca ocurre. Este es un ejemplo de fenómenos que ocurren en la naturaleza en un solo sentido. Son los llamados procesos irreversibles. El calor fluye irreversiblemente del cuerpo caliente al cuerpo frío. Otro ejemplo de procesos irreversibles es el rompimiento de un vaso de vidrio. El vaso se transforma irreversiblemente en mil partículas de vidrio. Nunca se ha observado experimentalmente que mil pedacitos de vidrio espontáneamente adquieran la forma de un vaso.

Esta preferencia que tiene la naturaleza para que los procesos ocurran en determinados sentidos y no en los opuestos es la causa, por ejemplo, de que todo el trabajo efectuado sobre un sistema se pueda transformar en calor, pero es imposible que todo el calor recibido por un sistema sea transformado en trabajo mecánico. Este es el tema de la segunda ley de la termodinámica, que para nuestros propósitos en este curso podemos enunciar de la siguiente forma

La máxima eficiencia de una máquina térmica que trabaja entre dos focos térmicos T_1 (caliente) y T_2 (frío) es la de un ciclo de Carnot.

$$\xi_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

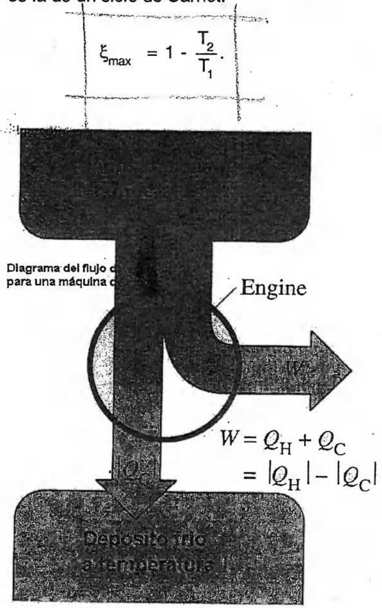


Figura 10.26

PROBLEMAS

01.-. Dos cilindros de 1 m^3 cada uno , contienen gas ideal a temperatura ambiente (300 K) y están unidos por un tubo en forma de U parcialmente lleno con un líquido (ρ = constante = 1000 kg/m^3) como se muestra en la figura. Si se eleva la temperatura del cilindro II a 360 K , el nivel del líquido en las ramas del tubo en U se invierte. ¿Cuántas moles hay en el cilindro II ?. Considere que el volumen del tubo en U es muy pequeño en comparación con el volumen de los cilindros, considere R = (25/3) J/mol°K

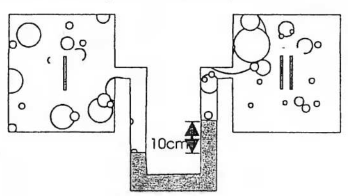


Figura 10.27

A) 4,4 B) 4,8 C) 4,0 D) 4,2 E) 4,6

02.- Hallar el incremento de temperatura (en unidades de 10^4 °C) que debe experimentar la corona circular de la figura (α = (25/3) x 10^{-6}/ °C), para que su densidad superficial disminuya hasta el 75 % de su valor inicial.

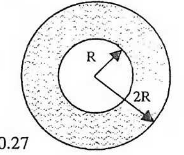


Figura 10.27

A) 1,75 B) 1,80 C) 1,85 D) 1,90 E) 1,95

03.- Se utiliza durante 2 minutos un taladro de 250 W para perforar una placa de bronce (c = 0,094 cal/g °C) de 3 kg. Si el 60 % de la potencia del taladro se disipa en forma de calor, el cual calienta al bronce, determine, aproximadamente, en cuantos grados centígrados se eleva la temperatura de la placa. (1 J = 0,24 cal)

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

04.- La gráfica muestra los procesos seguidos por 20 mol de un gas ideal. Halle el volumen (en m^3) que ocupa el gas cuando se encuentra en el estado (3). (Sugerencia: observe que (1) y (3) están sobre la misma recta). R = 8,31 J/mol K.

A) 0,30 B) 0,32 C) 0,34
D) 0,36 E) 0,40

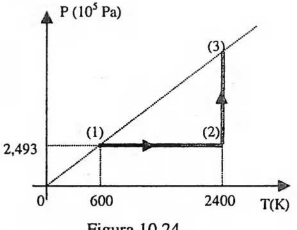


Figura 10.24

05.- Un tanque de 0,01 m^3 contiene un gas (M = 25 g/mol) a la presión manométrica de 1 x 10^6 Pa y 27 °C de temperatura. Si se mantiene la temperatura del gas constante mientras lentamente se deja escapar gas hasta que su presión absoluta sea de 2 x 10^5 Pa, determine aproximadamente la masa (en gramos) del gas que se dejó escapar. (P_{atm} = 1 x 10^5 Pa, R = 25/3 J/mol K)

A) 50 B) 70 C) 80 D) 110 E) 130

06.- Halle la energía cinética total (en J) de 10^{21} moléculas de un gas ideal monoatómico encerrado en un recipiente si el gas se encuentra a una temperatura de 127 °C.

A) 5,05 B) 8,30 C) 11,5 D) 19,45 E) 24,06

07.- Se tiene un sistema termodinámico, el cual en un primer proceso absorbe 1 kcal y hace un trabajo igual a 100 cal; luego en un segundo proceso cede 200 cal y se hace un trabajo sobre él igual a 300 cal. Halle el cambio neto (en kcal) en la energía interna del sistema.

A) 0,8 B) 1,0 C) 1,5 D) 1,8 E) 2,0

08- El cilindro de la figura, de 20 cm^2 de sección recta, contiene 2 mol de un gas ideal a 273 °C, los cuales ocupan un volumen de 44,8 litros. Si el émbolo puede deslizarse libremente, ¿qué peso (en N) debe tener para mantener al gas en equilibrio estático? (presión atmosférica = 1 atm = 100 kPa; R = 0,082 atm l/mol K)

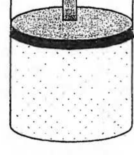


Figura 10.30

A) 50 B) 100 C) 150 D) 200 E) 250

09- Cuando un sistema pasa del estado A al estado B a lo largo de la trayectoria ACB, el sistema absorbe 80 J de calor y realiza 30 J de trabajo. El sistema vuelve del estado B al A a lo largo de la trayectoria curva. El trabajo realizado sobre el sistema es de 20 J. ¿El sistema absorbe o cede calor? ¿cuánto?

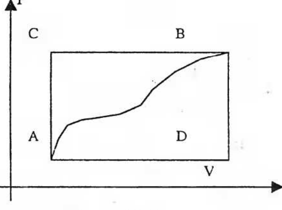


Figura 10.31

A) Cede 70 J B) Absorbe 70 J
C) Cede 90 J D) Absorbe 90 J
E) No cede ni absorbe calor.

10. El diagrama muestra la variación de la eficiencia ε, en función de la temperatura de la fuente fría, de una máquina de Carnot que recibe 500 J de calor de la fuente caliente. Calcule el trabajo (en J) que realiza la máquina si $T_2 = 250$ K.

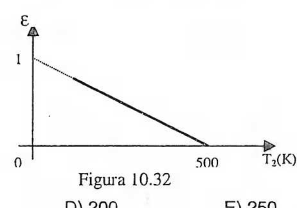


Figura 10.32

A) 50 B) 100 C) 150 D) 200 E) 250

11. Una máquina térmica de Carnot recibe calor de una fuente a 87 °C y retorna parte de éste a un sumidero a 27 °C. ¿Con qué rapidez (en kJ/s) debe suministrársele calor para obtener trabajo mecánico a razón de 1 kJ/s?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

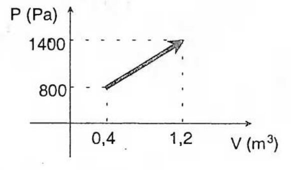
12. Un recipiente cuya capacidad calorífica es de 200 cal/°C contiene 2 kg de agua a 0°C en equilibrio térmico. Si en el recipiente se introduce 2 kg de arqueolita (c = 0,8 cal/g °C), la temperatura de equilibrio resulta ser de 90 °C. Determine la temperatura inicial de la arqueolita en °C

A) 123,75 B) 213,75 C) 312,75 D) 531,75 E) 753,75

13. Dos moles de un gas ideal monoatómico contenido en un recipiente se expanden adiabáticamente de modo que la temperatura disminuye en 100°C, ¿Cuál fue el trabajo (en J) efectuado por el sistema durante este proceso?. Considere R - 25 J/mol K

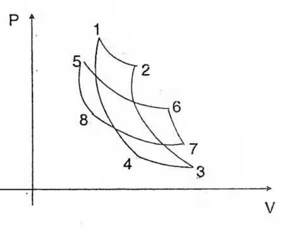
A) 2 500 B) 2 504 C) 2 506 D) 2 508 E) 2 510

14.- Determine el cambio de la energía interna en la sustancia de trabajo de la máquina térmica, durante el proceso mostrado, sabiendo que se le entregaron 2000J de calor.



A) 2 200 J B) 902 J C) 1 820 J
D) 1 120 J E) 720 J

15. Dos máquinas térmicas trabajan en ciclos de Carnot, según los procesos 12341 y 56785, respectivamente. Identifique la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones, si el área de ambos ciclos es la misma,



I) En cada ciclo ambas máquinas hacen el mismo trabajo
II) La eficiencia de ambas máquinas es la misma
III) El proceso 12341 es más eficiente que el 56785.

Capítulo 

Electrostática



CHARLES A. COULOMB (1736-1806)
Físico francés a quien se le atribuye haber determinado la ley de fuerzas que gobierna a las cargas electrostáticas.

INTRODUCCIÓN

Casi todos conocemos los efectos eléctricos producidos por fricción en muchas situaciones ordinarias. Por ejemplo frote un peine de plástico con un paño de lana y acérquelo a un trozo pequeño de papel, éste es atraído. Este fenómeno se debe a un desequilibrio entre las cargas eléctricas de los cuerpos que intervienen.
Uno de los primeros en estudiar ese fenómeno fue el filósofo griego Tales de Mileto, alrededor del año 600 a.C. Notó que si se frotaba con lana una varilla de ámbar (elektron), ésta podía atraer cuerpos pequeños y ligeros (pluma, pajita). Posteriormente esta propiedad pudo observarse en el vidrio y en la ebonita.

CARGAS ELECTRICAS

Si se frota una varilla de ebonita con lana se observa que ella atrae una esferita de la misma lana suspendida de un hilo de seda, pero al tocarla la repele. Si se le acerca una varilla de vidrio previamente frotada con lana la bolita es atraída.

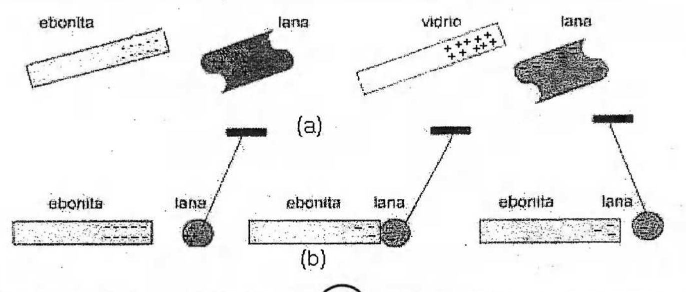


Figura 11.1 (a) Al frotar la ebonita y la lana se cargan, igual ocurre cuando se frota la lana con el vidrio. —(b) Proceso de carga por contacto

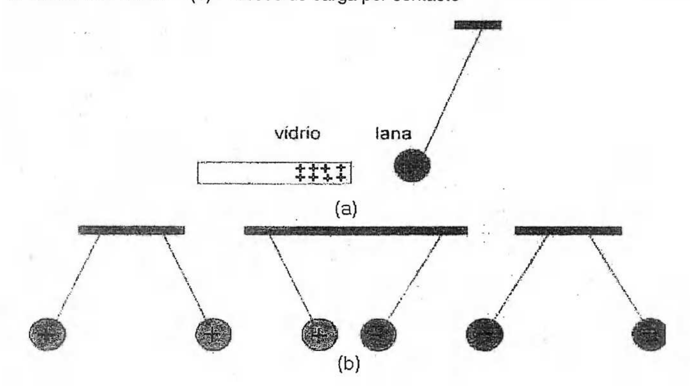


Figura 11.2 Cargas del mismo signo se repelen y cargas de signo contrario se atraen.

11.1 CARGA ELECTRICA

Los resultados experimentales han confirmado la naturaleza eléctrica inherente de la materia es decir la carga eléctrica al igual que la masa es otra propiedad fundamental de la materia. Sabemos que toda la materia está formada de átomos. El átomo se compone de un núcleo muy denso formado de protones cargados positivamente y de neutrones sin carga. El núcleo está rodeado de electrones con carga negativa.

Todos los electrones son idénticos; es decir, todos tienen la misma masa y la misma carga. Todos los protones son idénticos, igualmente todos los neutrones lo son.

La carga del protón que es positiva es de la misma magnitud que la carga negativa del electrón.

En general, los átomos tienen carga neta cero ya que tiene tantos electrones como protones

Como la materia está formada de átomos y los átomos están compuestos de protones y electrones así como de neutrones, luego si un objeto tiene el mismo número de electrones como de protones **su carga neta será cero** es decir está en **estado neutro**. Los objetos están cargados cuando el número de electrones y protones no es igual. El hecho de que el cuerpo esté cargado se debe a la ganancia o la pérdida de electrones.

Ahora podemos explicar como se cargan las varillas de ebonita, vidrio y el paño de lana cuando estas se frotan entre sí, así como las interacciones entre estos de acuerdo a lo mostrado en la figura 11.1

Cuando frotamos la varilla de ebonita algunos electrones de la lana se transfieren a la varilla, de este modo la ebonita, adquiere un exceso de electrones, se carga negativamente, mientras que la lana pierde electrones, cargándose positivamente. Los electrones sacados de la lana por fricción son los que estaban más débilmente ligados al núcleo de los átomos, es decir, los que están en los niveles energéticos más externos.

Cuando la varilla de ebonita se pone en contacto con la bolita de lana ésta adquiere parte de la carga negativa. La repulsión entre los dos cuerpos queda explicada entonces por la existencia, en ambos, de cargas eléctricas del mismo signo (electrones).

Cuando se frota una varilla de vidrio sucede lo contrario, los electrones pasan del vidrio a la lana quedando cargada la varilla positivamente. Si se acerca la bolita de lana a la varilla de vidrio se observa una atracción entre ellas debido a la presencia, en ambas, de cargas de signos contrarios.

CONSERVACION DE LA CARGA

La carga se conserva; o sea, no puede ser creada ni destruida. Si un objeto pierde electrones es por que éstos han pasado a otra parte. Por ejemplo, al frotar la varilla de vidrio con lana, ésta pierde electrones quedando cargada positivamente, pero al mismo tiempo la lana recibe la misma cantidad de electrones quedando cargada negativamente. En el sistema aislado vidrio-lana la carga permanece constante.

CUANTIZACION DE LA CARGA

Como todo objeto cargado tiene un excedente o un déficit de electrones esto significa que la carga del cuerpo es un múltiplo entero de la carga del electrón.

$$Q = ne$$

En donde n es un numero entero

CONDUCTORES Y AISLANTES

Podemos clasificar los cuerpos en **conductores** (metales, aleaciones metálicas, soluciones acuosas de ácidos, bases y sales, etc.), a través de los cuales fluyen cargas eléctricas, y **Aislantes** (ámbar, vidrio, parafina, porcelana, etc.), en los cuales las cargas eléctricas no fluyen con facilidad.

La diferencia entre los materiales aislantes y conductores pueden explicarse suponiendo que un sólido buen conductor contiene un gran número de electrones libres es decir, de electrones externos débilmente ligados a los núcleos de los átomos, y que son libres de desplazarse por todo el material. En el caso de los aislantes, por el contrario, el número de electrones libres es sumamente pequeño, los electrones están fuertemente ligados a sus átomos, siendo difícil el movimiento de cargas en su interior.

FORMAS DE ELECTRIZACION DE LOS CUERPOS

1.- **Por rozamiento:**
Cuando describimos los tipos de carga que adquieren los cuerpos, al frotar la varilla de ebonita con un paño de lana una parte de las partículas cargadas más móviles (electrones) pasan de la lana a la varilla de ebonita cargándolo negativamente mientras que el paño de lana se carga positivamente, como se muestra en la figura 11.1(a)

2.- **Por contacto:**
Cuando ponemos en contacto la varilla de ebonita cargada negativamente con la bolilla de lana cargada positivamente esta adquiere parte de la carga negativa repeliéndose ambas, ver figura 11.1(b)

3.- **Por inducción:**

a) En este diagrama las esferas A y B son neutras y están en contacto de modo que juntas forman un conductor no cargado.

b) Ahora se aproxima una barra cargada negativamente a la esfera A. Los electrones del metal se ven rechazados por la barra, desplazándose a la barra B, dejando la esfera A cargada positivamente. Las cargas de las esferas se han redistribuido, decimos que se han inducido cargas en las esferas.

c) Las esferas A y B son separadas en presencia de la barra.

d) La barra se retira, quedando las esferas cargadas con cargas iguales y opuestas.

Decimos que las esferas han sido cargadas por inducción

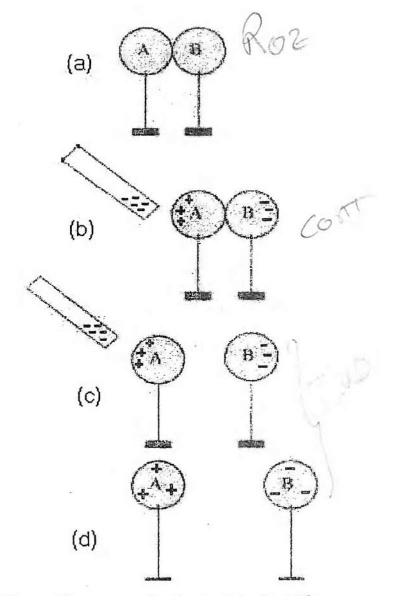


Figura 11.3 Carga de un conductor por inducción

11.2 LEY DE COULOMB

Toda la **ELECTROSTÁTICA** está basada en los experimentos sobre las fuerzas que se ejercen entre partículas cargadas en reposo, realizados por CHARLES

COULOMB, utilizando en sus experimentos una balanza de torsión de su propia invención.
Como resultado de sus experimentos Coulomb llegó a la siguiente conclusión:

1.- La fuerza entre dos partículas cargadas está dirigida a lo largo de la línea que las une.

2.- La fuerza que se ejerce entre dos cargas puntuales es atractiva si las cargas son de signos opuestos y repulsivas si las cargas tienen el mismo signo.

3.- La fuerza es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r que las separa.

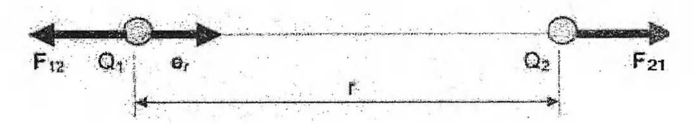


Figura 11.4 Interacción entre partículas cargadas en reposo.

$$F_{12} = F_{21} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$\mathbf{F}_{12} = -k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

En donde k es una constante de proporcionalidad que depende del sistema de unidades utilizados. Si utilizamos el sistema internacional, entonces:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9x10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2 \qquad \text{Siendo: } \varepsilon_0 = 8{,}85x10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2$$

ε_0 = Permitividad eléctrica del vacío, que caracteriza el medio en donde están ubicadas las cargas.

Ejemplo 1

En la parte inferior de un plano inclinado se encuentra una carga puntual fija al plano, con carga $q_1 = 10^{-7}$C. A 10 cm de esta carga en el mismo plano inclinado se encuentra en equilibrio una esferita de masa "m" con la misma carga que q_1. Determinar la masa de la esferita en gramos

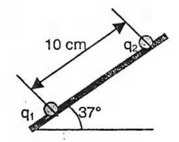


Figura 11.5

Solución:

DCL de la esferita superior:

q_2 Fe mg senθ mg cosθ mg

Figura 11.6

Como la esferita está en equilibrio:

mg senθ = Fe = kq_1q_2/r^2...despejando m:

$$m = kq_1q_2/g\ sen\theta\ r^2 = \frac{9x10^9x10^{-7}x10^{-7}}{10x\,(3/5)\,x(0,1)^2} = 15x10^{-4}\ Kg$$

$$m = 1,5\ g$$

Ejercicio: Un objeto tiene una carga neta de –0,5 C. ¿Cuántos electrones en exceso tiene el objeto? Rpta. n = ____________

11.3 CAMPO ELECTRICO

La interacción entre cuerpos cargados en reposo se efectúa por medio del concepto de **CAMPO ELECTRICO.** Toda carga hace que varíen las propiedades del espacio que la rodea, crea en él un campo eléctrico. Esto significa que si en un punto cualquiera de dicho campo se coloca otra carga q_o (q_o>0), ésta se verá sometida a cierta fuerza F, cuya intensidad puede determinarse usando la ley de **Coulomb**. A la carga q_0 se le supone pequeña, tal que sea despreciable su efecto sobre las propiedades eléctricas del espacio donde se le coloca.

Entonces, siempre que sobre una carga de prueba q_0 colocada en un punto del espacio actúa una fuerza de origen eléctrico puede afirmarse que en ese punto hay un campo eléctrico. Esta comprobación es importante pues permite imaginar al campo eléctrico como algo independiente de la presencia de cargas de prueba.

Por lo tanto, si una carga de prueba positiva q_0, se coloca en una región en donde existe un campo eléctrico creado por una carga Q, la carga de prueba estará bajo la acción de una fuerza F, la intensidad del campo eléctrico esta definido por:

$$E = \frac{F}{q_0} \quad : \quad [N/C]$$

El campo eléctrico es una magnitud vectorial por lo tanto es necesario conocer además de su módulo, su dirección y sentido.

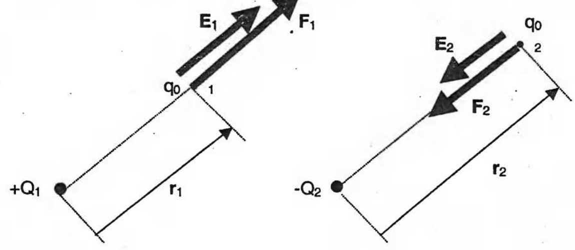


Figura 11.7

La dirección y sentido del vector **E** está dado por la dirección y sentido de la fuerza que actúa sobre la carga de prueba.

CAMPO ELECTRICO DEBIDO A UNA CARGA PUNTUAL

$$\mathbf{E}_P = \frac{\mathbf{F}_{q0}}{q_0} \quad \text{: aplicando la ley de Coulomb}$$

$$\mathbf{E}_P = \frac{K\,(q_0 Q)\,/\,r^2}{q_0}\,\mathbf{e}_r = \frac{kQ}{r^2}\,\mathbf{e}_r$$

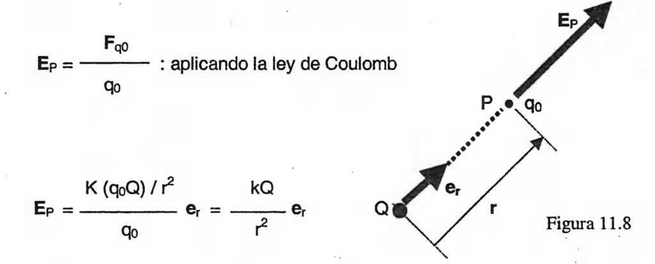


Figura 11.8

CAMPO ELECTRICO DEBIDO A UN SISTEMA DE CARGAS PUNTUALES

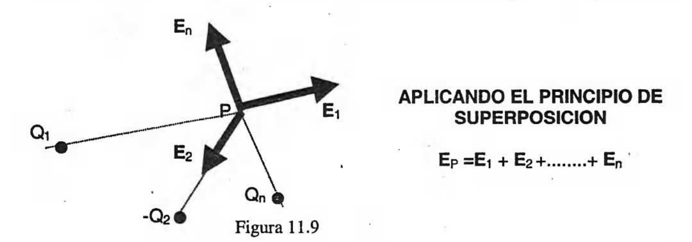
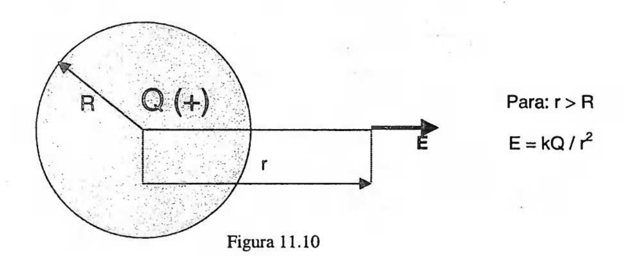


Figura 11.9

APLICANDO EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

$$\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots\ldots + \mathbf{E}_n$$

CAMPO ELECTRICO DEBIDO A UNA DISTRIBUCION UNIFORME DE CARGA EN UNA ESFERA NO CONDUCTORA (Q = carga total)



Para: $r > R$

$E = kQ / r^2$

Figura 11.10

CAMPO ELECTRICO DEBIDO A UN CASCARON ESFERICO.

Cascarón esférico de radio a con una carga total Q distribuida simétricamente.

Para $r > a$ $\quad E = kQ/r^2$

Para $r < a$ $\quad E = 0$

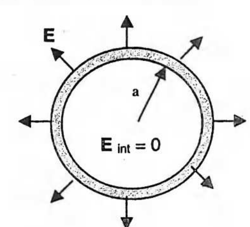


Figura 11.11

CAMPO ELECTRICO DEBIDO A UN ALAMBRE MUY LARGO

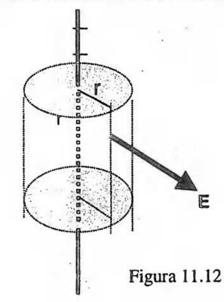


Figura 11.12

Considerando un alambre muy largo con carga eléctrica distribuida uniformemente, se determina que la intensidad del campo eléctrico a la distancia r del alambre es:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

En donde λ es la densidad lineal de carga, definida como la carga por unidad de longitud. $\lambda = \Delta q / \Delta l$ (C / m)

CAMPO ELECTRICO DEBIDO A UNA LÁMINA INFINITA NO CONDUCTORA CON DENSIDAD SUPERFICIAL DE CARGA UNIFORME σ

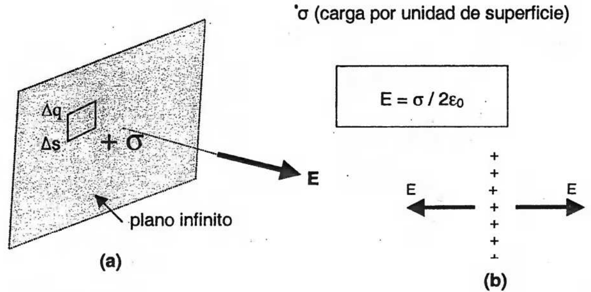


Figura 11.13

Ejemplo 2
En los vértices de un triangulo rectángulo isósceles se encuentran las cargas $q_1 = -30\ \mu C$, y q_2 como se muestra en la figura. Determinar la magnitud y signo de la carga q_2 de tal forma que el campo eléctrico resultante en el punto P sea horizontal.

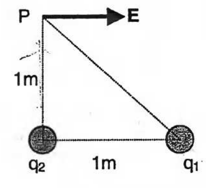


Figura 11.14

Solución
La intensidad del campo eléctrico de una carga Puntual es $E = kq/r^2$, luego:

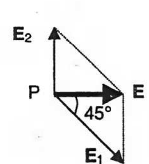


Figura 11.15

$E_1 = k\ q_1/2$............$E_2 = k\ q_2/1$

Como el campo resultante es horizontal:

$$E_1 \text{ sen } 45° = E_2$$

$(kq_1/2)(\sqrt{2}/2) = k\ q_2/1$.......... $q_2 = 10,6\ \mu C$

Ejemplo 3

Para la configuración de cargas mostradas en la figura, determinar el vector campo eléctrico en el punto medio P del segmento que une ambas cargas, si Q = 0,2 μC

Figura 11.16

Solución:

Por superposición: $\bar{E} = \bar{E}_+ + \bar{E}_-$

$\bar{E}_1$ y $\bar{E}_-$ son paralelos, luego

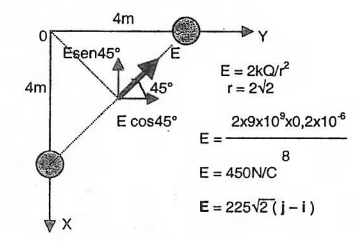


Figura 11.17

LINEAS DE FUERZA (LINEAS DE CAMPO)

La noción de líneas de fuerza (L.F.) fue introducida por primera vez por Michael Faraday, constituyendo un procedimiento muy conveniente para visualizar y analizar los campos eléctricos.

Características de las L.F.

a) Las L.F. se originan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas.

b) El sentido de las L.F. en todos los puntos es el mismo que el del campo eléctrico. Las L.F. se trazan de tal modo que la tangente a ellas en cada punto coincide con la dirección del vector **E**.

c) Las L.F. son continuas excepto en las cargas positivas y en las cargas negativas.

d) El número de L.F. que emergen o llegan a las cargas es proporcional al valor absoluto de las cargas.

e) Las L.F. nunca se cruzan.

f) La intensidad del campo eléctrico es proporcional a la densidad de L.F. esto es, al número de líneas por unidad de área que atraviesan por una superficie normal a la dirección del campo.

11.4 POTENCIAL ELECTRICO (V)

Analizamos la siguiente situación, dos partículas, una cargada positivamente y la otra negativamente como se muestra en la figura.

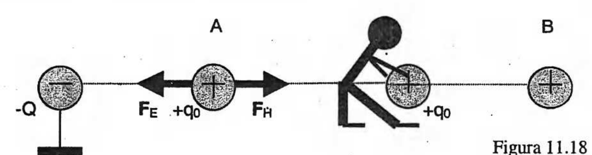


Figura 11.18

F_E = fuerza del campo eléctrico
$F_{ext} = F_H$ = fuerza del hombre (fuerza externa)

El hombre realiza trabajo con el fin de vencer la atracción eléctrica, está haciendo trabajo contra el campo eléctrico de la carga negativa.
Se demuestra que la fuerza electrostática es **conservativa,** por lo tanto tiene asociada una energía potencial electrostática U, lo que nos permite afirmar que.

$$\Delta U = U_B - U_A = -W^{F_E}_{A\to B}$$

Definimos como la diferencia de potencial entre los puntos A y B

$$V_B - V_A = (U_B - U_A)/q_0 = -W^{F_E}_{A\to B}/q_0 = W^{F_{ext}}_{A\to B}/q_0$$

$$\boxed{W^{F_{ext}}_{A\to B} = q_0(V_B - V_A)}$$

El Trabajo necesario para mover una partícula de carga unitaria positiva desde el punto A hasta B en contra de las fuerzas del campo es igual a la diferencia de potencial entre los puntos B y A.

En el SI la unidad de potencial es el volt (V) (1V = 1J/C)

Para definir el potencial en un punto es necesario un potencial de referencia, usualmente se considera el potencial igual a cero en el infinito.

Si el punto A se toma en el infinito y el punto B coincide con el punto P, entonces:

$$V_P - V_\infty = W^{F_{ext}}_{\infty\to P}/q_0$$

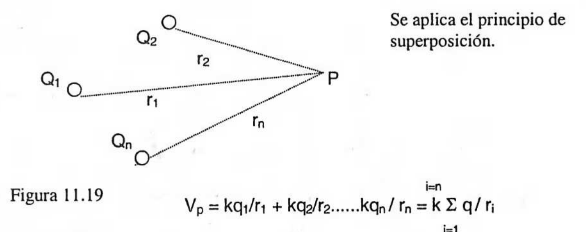
Potencial eléctrico en el punto P: $V_P = W^{F_{ext}}_{\infty\to P}/q_0$

POTENCIAL EN UN PUNTO DEBIDO A UNA CARGA PUNTUAL

Cuando tratamos de evaluar el $W_{A \to B}$ realizado contra las fuerzas del campo, observamos que la fuerza externa varia mientras la carga se desplaza desde A hasta B, en estas condiciones F_{ext} no es constante por lo que su valor sólo se puede evaluar mediante el empleo de métodos matemáticos que no están a nuestro alcance. Con el empleo de estos métodos se demuestra que una carga puntual Q en el vacío establece en un punto P situado a una distancia r de esta carga un potencial V dado por:

$$V_p = kQ/r$$

POTENCIAL ELECTRICO DEBIDO A UN SISTEMA DE n CARGAS PUNTUALES

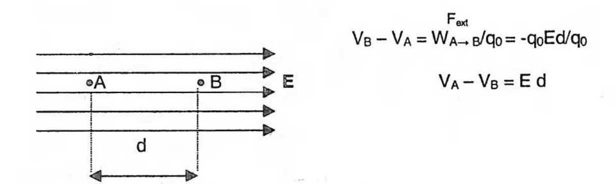


Se aplica el principio de superposición.

Figura 11.19

$$V_p = kq_1/r_1 + kq_2/r_2 ......kq_n / r_n = k \sum_{i=1}^{i=n} q / r_i$$

DIFERENCIA DE POTENCIAL EN UN CAMPO ELECTRICO UNIFORME



$$V_B - V_A = W^{F_{ext}}_{A \to B}/q_0 = -q_0Ed/q_0$$

$$V_A - V_B = E\, d$$

POTENCIAL EN EL EXTERIOR DE UNA DISTRIBUCION ESFERICA CONTINUA DE CARGA CON DENSIDAD CONSTANTE.

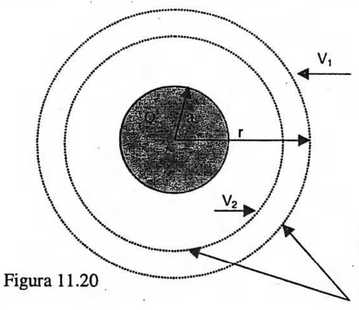


Figura 11.20

Para r > a

$V_1 = kQ / r$

$V_2 > V_1$

SUPERFICIE EQUIPOTENCIAL

Es aquella superficie cuyos puntos están todos al mismo potencial

PROPIEDADES DE UN CONDUCTOR EN EQUILIBRIO ELECTROSTATICO

Un cuerpo conductor se encuentra en equilibrio electrostático cuando las cargas del conductor se encuentran en reposo.

a) El campo eléctrico es cero en cualquier punto interior del conductor.
b) Cualquier carga en exceso que posea el conductor debe residir enteramente en la superficie del mismo.
c) El campo eléctrico justo en el exterior de la superficie del conductor es perpendicular a dicha superficie y tiene el valor (σ/ε_0) en donde σ es la densidad de carga superficial, que puede variar de un punto a otro de la superficie.
d) En un conductor de forma irregular la carga tiende a acumularse en regiones donde el radio de curvatura de la superficie es más pequeña, es decir, en las puntas.

Ejemplo 4

La figura muestra la carga puntual Q = 2 μC
a) Determinar la diferencia de potencial entre los puntos A y B.
b) Determinar la diferencia de potencial entre los puntos B y C
$R_1 = 0{,}5$ m y $R_2 = 1$ m

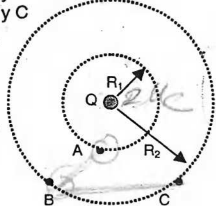


Figura 11.21

Solución:

$V_A = kQ / R_1 \ldots\ldots V_B = kQ / R_2 \ldots\ldots\ldots V_C = kQ / R_2$

$V_A - V_B = kQ\,(R_2 - R_1) / (R_1R_2) = 9\text{x}10^9\text{x}2\text{x}10^{-6}\,(1\text{-}0{,}5)/1\text{x}0{,}5$

$V_A - V_B = 18\text{x}10^3$ V

$V_B - V_C = kQ/R_2 - kQ / R_2 = 0$

Ejemplo 5

Dos gotas de agua del mismo radio tienen en su superficie potenciales V_1 y V_2. Si las dos gotas se unen formando una sola gota, determinar el potencial en la superficie de la nueva gota.

Solución

$V_1 = kQ_1 / R$......$V_2 = kQ_2 / R$ despejando Q_1 y Q_2 en ambas ecuaciones:

$Q_1 = V_1R / k \quad Q_2 = V_2R / k$

El radio R' de la nueva gota: $4\pi R'^3/3 = 2[4\pi R^3/3]$.......$R' = R\ 2^{1/3}$

El potencial en la superficie de la nueva gota es: $V = kQ_T/R'$ en donde: $Q_T = Q_1 + Q_2$

Reemplazando: $V = k\ (V_1\ R/k + V_2R/k)\ /\ 2^{1/3}\ R = (V_1 + V_2)\ /\ 2^{1/3}$

Ejemplo 6

La figura muestra dos superficies equipotenciales (líneas punteadas) tales que V_A = -10 V y V_B = -20 V. ¿Cuál es el trabajo externo necesario para mover una carga de -2 μC con rapidez constante desde A hasta B a lo largo de la trayectoria mostrada?

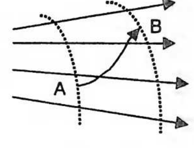


Figura 11.22

Solución

$W_{AB} = q_0\ (V_B - V_A) = -2x10^{-6}\ [-20 - (-10)]$

$W_{AB} = -2x10^{-6}\ (-10) = 2x10^{-5}$ J

11.5 CAPACIDAD ELECTRICA

En la sección anterior se vio que las cargas eléctricas acumuladas en un material conductor se distribuyen sobre la superficie de éste, de manera que el campo eléctrico en el interior es nulo, el conductor es así un cuerpo equipotencial. veremos ahora la gran importancia de enfrentar dos conductores separados por el espacio libre o por un medio dieléctrico. Empezaremos trasladándonos imaginariamente al año 1746 a Francia, en donde, un científico francés de cierto renombre, Réaumur, recibió una carta del profesor Musschenbroek de la Universidad de Leyden de Holanda, donde el profesor le describía un nuevo, pero terrible experimento que le aconsejaba no trate de hacerlo. Poco después un estudiante de la universidad de Holanda, M. Allaman le describía como era el experimento:

> "Recibirá usted un choque prodigioso, que le afectará en su brazo y hasta en todo el cuerpo; es un golpe de rayo, la primera vez que lo recibí me afecté a tal grado que por algunos momentos no pude respirar."

A este aparato se le llamó botella de Leyden que principalmente era una botella de vidrio con una capa interior y exterior de un material conductor. Este fue el primer condensador utilizado para almacenar carga eléctrica. Años mas tarde, Benjamin Franklin comprobó que el dispositivo para almacenar cargas no debía tener necesariamente la forma de botella y utilizó en su lugar vidrios de ventana recubiertos de hojas metálicas, que se llamaron vidrios de Franklin. Con varios de estos vidrios conectados en paralelo, Franklin almacenó una gran carga y con ello trató de matar un pavo. En su lugar, sufrió el mismo una fuerte descarga. Mas tarde, Franklin escribió:

"Trataba de matar un pavo y por poco maté un ganso".

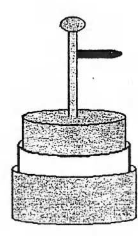


Figura 11.23

11.6 CONCEPTOS BASICOS:

CAPACITANCIA (C).- Definido como la carga eléctrica (Q) que puede acumular un conductor, por unidad de diferencia de potencial (V).

$$C = \frac{Q}{V} : \left[F = \frac{C}{V} \right]$$

F: farad

Ejemplo 7
Halle la capacitancia de una esfera conductora de radio R, con carga eléctrica Q.

Solución

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{KQ/R} = \frac{R}{K}$$

Finalmente:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Esta última ecuación hace evidente una propiedad general de la capacidad, la cual es que siempre depende de la geometría de los conductores y del medio.

CONDENSADOR.- Los condensadores o capacitores son dispositivos utilizados para almacenar carga y energía eléctrica. Están formados por dos conductores próximos uno a otro, separados por un aislante, de tal modo que puedan estar cargados con el mismo valor pero de signo contrario. Encontrándose los conductores a una diferencia de potencial, y generando entre ellos un campo eléctrico.

CONDENSADOR PLANO.- Es el capacitor más sencillo, consiste en dos placas metálicas planas y paralelas de área A y separadas una distancia d, como se muestra en la figura (1):

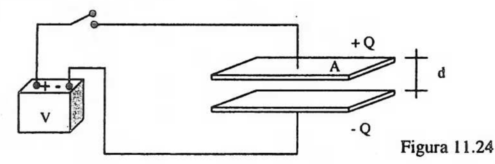


Figura 11.24

Al cerrar el interruptor, la fuente realiza trabajo para poner carga en las placas. Suponga que un electrón se mueve a una placa; poner el siguiente electrón será más difícil debido a que la carga original lo repelerá. La transferencia de carga adicional requiere de más y más trabajo a medida que se acumula la carga en la placa. A la carga que recibe una de las placas la llamaremos Q, y la carga de la otra placa será -Q.
La carga de un condensador y la diferencia de potencial entre sus placas no son independientes: están vinculadas entre sí por una relación sencilla que depende de las características del condensador.

$$Q = C\,V$$

La constante de proporcionalidad **C** es la **capacitancia** y expresa la carga por unidad de voltaje. El farad, unidad de la capacitancia, es una unidad grande de modo que se usa con frecuencia es el microfarad ($\mu F = 10^{-6}$ F).

Para placas paralelas de áreas iguales (A), que son grandes en comparación con la distancia (d) entre ellas, la capacidad está dada por:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

11.7 ASOCIACION DE CONDENSADORES.- Los condensadores se pueden conectar en dos formas básicas: en serie o en paralelo.

A) EN SERIE: Cuando los condensadores se conectan de tal modo que:

1. Todos los condensadores almacenan la misma carga

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$$

2. La suma del voltaje individual que cae a través de los capacitores es el voltaje de la fuente.

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

La fig. 11.25 muestra un ejemplo de esta conexión. Además, dado que V=Q/C,

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3}$$

Todas las cargas tiene igual valor y se pueden cancelar. Así, para tres capacitores en serie, se tiene la ecuación para hallar el capacitor equivalente de la serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

En general, para "n" condensadores en serie:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

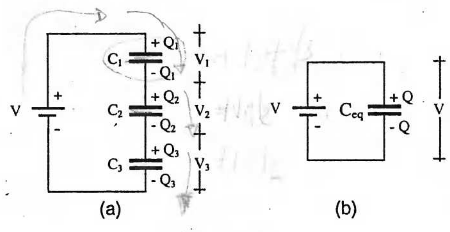


Figura 11.25

B) EN PARALELO: Cuando los condensadores están conectados de tal modo que:

1. La carga total es igual a la suma de las cargas individuales:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

2. Las diferencias de potencial para cada condensador tienen igual valor:

$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

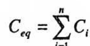
La fig. 11.26 muestra un ejemplo de esta conexión. Además, dado que Q=CV, reemplazando en la ecuación anterior:

$$C_{eq}V = C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3$$

Simplificando:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

En general, para "n" condensadores conectados en paralelo:



$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

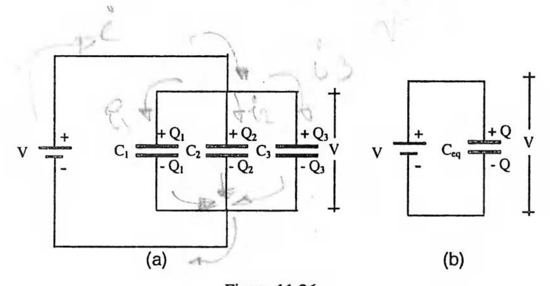


Figura 11.26

Ejemplo 8

Halle la capacidad equivalente del sistema de condensadores de 13μF mostrado en la figura, entre los terminales P y T.

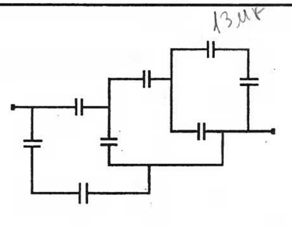


Figura 11.27

Solución:

Sea C=13μF la capacidad de todos los condensadores. El circuito de la figura 11.28(a) es equivalente al circuito de la figura 11.27, las siguientes figuras muestran como la combinación inicial de condensadores se va reduciendo a un único condensador equivalente; se ha aplicado las ecuaciones de acuerdo a, si los condensadores se encuentran en serie o en paralelo:

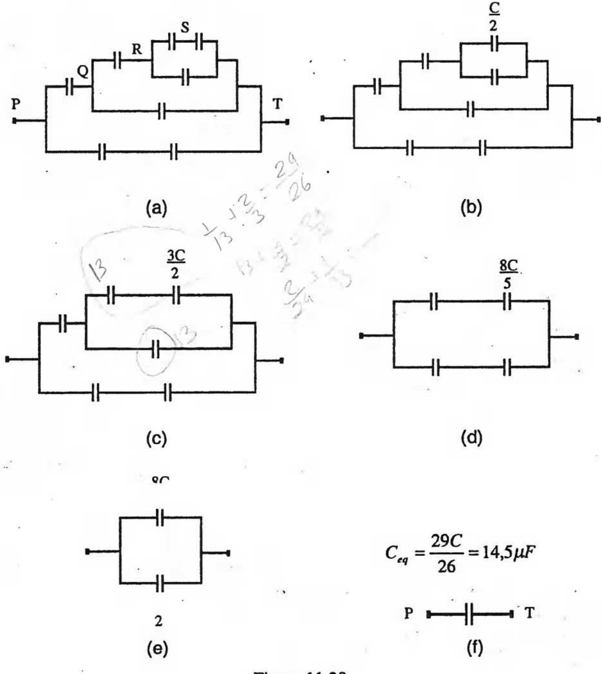


Figura 11.28

11.8. ENERGIA ALMACENADA EN CONDENSADORES.- La expresión para la energía que almacena un condensador se puede obtener por medio de análisis gráfico. Una gráfica de voltaje versus carga eléctrica origina una recta con una pendiente 1/C, como se observa en la figura 11.29. Para un condensador inicialmente descargado Q = 0 y $V_0 = 0$, para alguna carga final Q y un voltaje final V, el trabajo total realizado por la fuente es equivalente a la transferencia de la carga a través del voltaje medio V_m, donde:

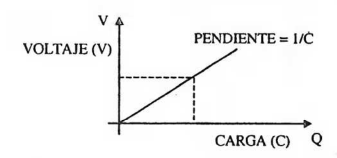


Figura 11.29

$$V_m = \frac{V_{final} + V_{inicial}}{2} = \frac{V+0}{2} = \frac{V}{2}$$

Así, el trabajo realizado por la fuente, es la energía almacenada, (compare este análisis con el realizado para el trabajo de un resorte) y se expresa como:

$$E_c = QV_m = \frac{1}{2}QV$$

dado que Q=CV, esta ecuación puede escribirse de otras maneras:

$$E_c = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

11.9 CONDENSADORES CON DIELECTRICO.- En la mayor parte de los condensadores, se coloca entre las placas un material aislante, el cual permite una construcción rígida y compacta, con una separación muy pequeña, esto conlleva a un incremento en la capacidad del condensador.

El material aislante es un dieléctrico, éste, se caracteriza por una constante llamada: **constante dieléctrica** (κ) en la tabla 11.1 se dan los valores de la constante dieléctrica de algunos materiales.

Tabla 11.1

MATERIAL	CONSTANTE DIELECTRICA
Vacío	1
Aire seco	1,00054
Agua pura	78
Mica	5,4
Papel	3,5
Pyrex	4,5
Baquelita	4,8
Teflón	2,1

En las siguientes figuras se observa como un dieléctrico afecta las propiedades eléctricas de un condensador:

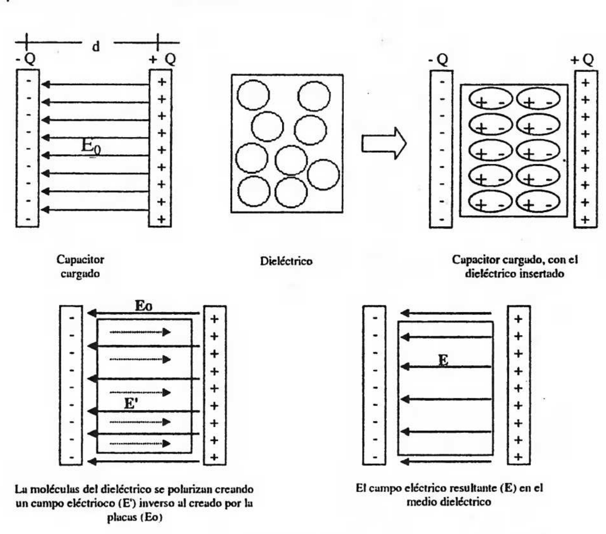


Figura 11.30

En la figura 11.30 se observa que debido al campo eléctrico de las placas, las moléculas del dieléctrico se polarizan, esto conlleva a que algunas líneas del campo eléctrico entre las placas se cancelen. El campo entre las placas a través del dieléctrico se reducen por un factor de **κ**.

Como V = Ed, entonces

$$E = \frac{E_0}{\kappa}$$

$$V = \frac{V_0}{\kappa}$$

Donde, V_0 es el voltaje dado sobre las placas sin dieléctrico. La carga Q no se afecta, de modo que la capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_0/\kappa} = \kappa C_0$$

o bien:

$$C = \kappa C_0$$

Si, por otro lado, se inserta el dieléctrico, manteniendo el voltaje constante, la fuente de tensión puede suministrar mas carga. la carga total sobre las placas es entonces: $Q = \kappa Q_0$, y nuevamente fácilmente se puede demostrar que $C = \kappa C_0$.

Problemas propuestos:

1.- Tres cargas puntuales idénticas están ubicadas en los vértices de un triangulo equilátero de 0,4 m de lado. Si cada carga es de –4 μC, determinar la magnitud de la fuerza eléctrica resultante sobre cada una de las cargas. Rpta. 0.9 $\sqrt{3}$ N.

2.- Dos esferitas metálicas de radios iguales con cargas q y 3q se repelen con una fuerza de 9 N. Si las esferitas se ponen en contacto y luego se ponen en sus posiciones originales. ¿Con que fuerza volverán a repelerse?. Rpta. 12 N

3.- Considere tres cargas iguales de 1 μC ubicadas en los tres vértices de un cuadrado de 1 m de lado como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico resultante en el vértice P.

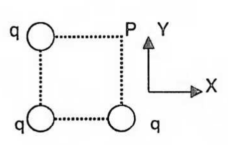


Figura 11.31

4.- Una esferita de 1 g de masa y cargada con 10 μC se encuentra en reposo ubicada a 1 cm encima de un lamina conductora muy grande cargada positivamente como se muestra en la figura. Determinar la intensidad del campo eléctrico generado por la lámina en el punto en donde se encuentra ubicada la esferita.
Rpta. 10^3 V/m

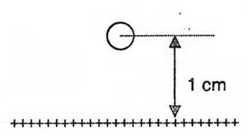


Figura 11.32

5.- Halle el trabajo necesario para colocar 3 cargas puntuales iguales con carga 2 μC en los vértices de un triangulo equilátero de 1 m de lado.
Rpta. 108 mJ

6.- En los puntos A y B se colocan las cargas de 200 μC y –100 μC respectivamente. Calcular el trabajo requerido para trasladar una carga de 5 μC desde C hasta D.
Rpta. 33,75 J

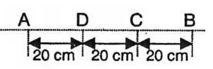


Figura 11.33

7.- En el circuito se muestra 4 condensadores iguales y un interruptor S. Si C_1 es la capacidad entre A y B con S abierto y C_2 cuando S está cerrado, determine $C_1 + C_2$.

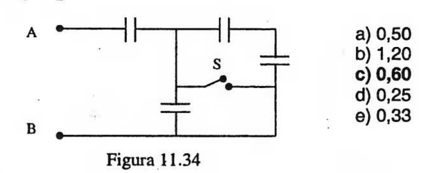


Figura 11.34

a) 0,50
b) 1,20
c) 0,60
d) 0,25
e) 0,33

8.- Halle la capacidad del condensador equivalente (en μF) entre A y B, si las capacidades de los condensadores en las diagonales son iguales a 5 μF.

a) 5 b) 10 c) 15 **d) 20** e) 25

30 μF
A
10 μF 10 μF 10 μF
B
30 μF

Figura 11.35

9.- Los condensadores mostrados son de C_1 = 6 μF, C_2 = 7 μF, C_3 = 5 μF y C_4 = 2μF. Determine la diferencia de potencial (en V) entre los puntos a y d, si la diferencia de potencial entre los puntos a y b es 20 V.

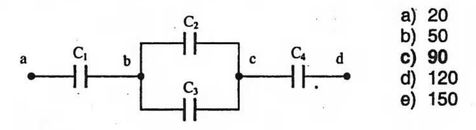


Figura 11.36

a) 20
b) 50
c) 90
d) 120
e) 150

10.- Halle la energía almacenada (en J) en el arreglo de condensadores que se muestra en la figura, si la capacidad de todos ellos es $C = 40\ \mu F$ y $V = 1{,}5$ kV.

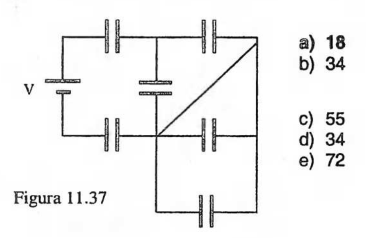


Figura 11.37

a) **18**
b) 34
c) 55
d) 34
e) 72

11.- Se ha encontrado que el campo eléctrico entre las placas de un condensador plano, de un transmisor de potencia, es de 2000 N/C, entonces la energía por unidad de volumen (en μJ/m3) entre las placas del condensador, aproximadamente es:
a) 17 b) 20 **c) 18** d) 21 e) 19

12.- Se tiene tres condensadores $C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = 2\mu F$ y $C_3 = 3\ \mu F$, como se muestra. Si dos de los condensadores deben ser llenados con un dieléctrico de constante k=2, ¿cuáles serían éstos, de tal modo que la capacitancia equivalente sea la mayor posible?

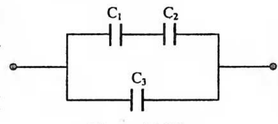
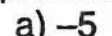


Figura 11.38

a) C_1 y C_2
b) C_1 y C_3
c) C_2 y C_3
d) En cualquier caso la capacidad equivalente es igual.
e) No se puede determinar.

13.- Determine el incremento (+) o disminución (-) de energía (en mJ) almacenada en el circuito mostrado, al pasar el interruptor S de la posición 1 a la posición 2; asuma k = 3 y C = 8 μF.


a) –5 b) +15 c) –20
d) +30 e) –40

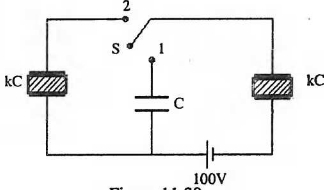


Figura 11.39

Capítulo



CORRIENTE ELECTRICA

ALESSANDRO VOLTA

INTRODUCCION

Para tomar conciencia de la tremenda importancia de la corriente eléctrica, tan solo bastaría imaginarse que el hombre no dispusiese precisamente de la corriente eléctrica, no tuviéramos ninguno de los aparatos y circuitos eléctricos "inteligentes" con el que hoy contamos. Es pues un salto gigantesco que el hombre logra en los tan solo últimos 200 años, a partir de 1800 cuando el profesor Alessandro Volta de la universidad de Pavia, Italia mostraba a sus alumnos la sencilla pila eléctrica, utilizando cobre, zinc y agua con sal. El

descubrimiento de estas baterías eléctricas por Volta trae consigo el tremendo desarrollo en el campo de la electricidad que hoy en día tenemos.
Es muy importante en la actualidad el poder transmitir y distribuir energía a grandes distancias de manera segura y muy económica con los portadores de carga en la denominada corriente eléctrica.

12.1 CORRIENTE ELECTRICA.- Es el fenómeno físico que consiste en el movimiento de los portadores de carga (electrones, iones positivos y iones negativos) en medios diversos y el vacío, por causas mecánicas o la presencia de un campo eléctrico.

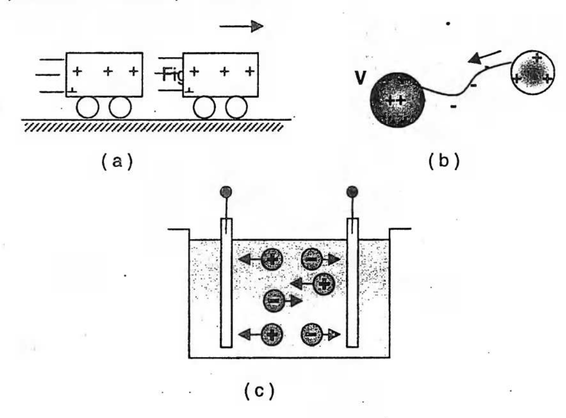


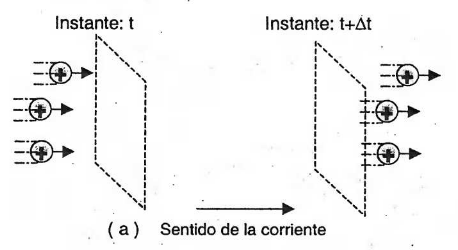
Figura 12.1

Figura 12.1 La corriente como resultado del movimiento de los portadores de carga eléctrica, en la Fig. 12.1a cada carrito tiene carga positiva en movimiento. En la Fig.12.1b se han conectado con un alambre una esfera con carga positiva y otra inicialmente neutra, los portadores de carga son electrones que se mueven de la esfera de menor potencial a la esfera de mayor potencial a través del alambre. En la Fig.12.1c los portadores de carga en movimiento son iones negativo e iones positivos presentes en el electrolito.

- INTENSIDAD DE CORRIENTE ELECTRICA (I).- Esta dada por la cantidad de carga eléctrica (ΔQ) que atraviesa una sección en la unidad de tiempo.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad : \quad \left[\frac{\text{coulomb (C)}}{\text{segundo (s)}} = \text{ampere (A)}\right] \qquad (12.1)$$

- **SENTIDO DE LA CORRIENTE**.- Por convención esta dada por el de la velocidad de los portadores de carga positivos.



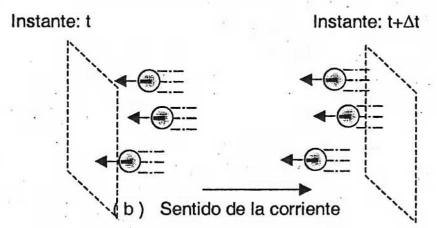


Figura: 12.2

Figura 12.2 En la Fig. 12.2a se muestra el caso del sentido de la corriente definido por el sentido del movimiento de los portadores de carga positivos que atraviesan la sección mostrada en un tiempo Δt. La Fig. 12.2b muestra el sentido de la corriente en sentido contrario al del movimiento de los portadores de carga negativa, es decir el paso de los portadores de carga negativa por la sección mostrada en un tiempo Δt es equivalente al paso de igual número de portadores de carga positiva pero en sentido contrario en el mismo intervalo de tiempo.

12.2. DENSIDAD DE CORRIENTE (**J**).- Es un vector cuyo modulo representa la rapidez del transporte de carga a través de la unidad de área normal a la corriente, cuya dirección esta dada por el de la velocidad de los portadores de carga positivos

$$J = \frac{I}{A} \quad : \quad \left[\frac{\text{ampere}}{\text{metro}^2} = \frac{A}{m^2}\right] \qquad (12.2)$$

- Relación entre **J** y la velocidad de los portadores: Si se considera que la carga neta contenida en un volumen ΔV es $\Delta Q = n\, q\, \Delta V$ donde n es el número de portadores móviles por unidad de volumen y q la magnitud de carga de cada portador.

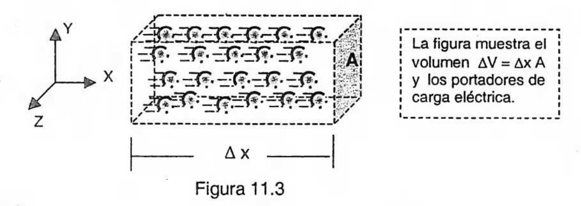


Figura 11.3

Podemos afirmar que:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{nq\Delta V}{\Delta t} = \frac{nqA\Delta x}{\Delta t} = nqvA \;\Rightarrow\; I = nqvA \qquad (12.3)$$

$$J = \frac{I}{A} \;\Rightarrow\; J = n\,q\,v \qquad (12.4)$$

Siendo v la velocidad promedio de las cargas.
En conductores rectilíneos, si los portadores de carga son positivos, **v** es positivo entonces, **J** es positivo, si los portadores son de carga negativa, **v** es negativa entonces, **J** es positivo.
La corriente para un movimiento de portadores de carga positivas y portadores de carga negativas es:

$$I = n\,(+q)\,(+v_d)\,A + n\,(-q)\,(-v_d)\,A$$

Siendo la dirección de la corriente el del vector densidad de corriente **J** que es la dirección del flujo de cargas positivas.

- Existen dos tipos de corriente:
Por convección.- El medio es quien mueve a las cargas eléctricas tal como se muestra en la Fig. 12.1a, los carritos mueven a las cargas.
Por conducción.- Las cargas se mueven en el medio, que es el caso que estudiaremos.

12.3 RESISTENCIA ELECTRICA (R).

- Representa la dificultad que un medio ofrece al paso de la corriente. Se define como el cociente de la diferencia de potencial (ΔV) a la cual es sometido el medio y la intensidad de la corriente (I) que la atraviesa .

$$R = \frac{\Delta V}{I} \quad : \quad \left[\frac{\text{voltio (V)}}{\text{ampere (A)}} = \text{ohm } (\Omega) \right] \qquad (12.5)$$

12.4 LEY DE OHM

- Esta ley no es aplicable a todos los medios o materiales, pero se cumple para muchos metales a una determinada temperatura constante. " El cociente de la diferencia de potencial (V) entre la corriente que pasa por un alambre es constante.

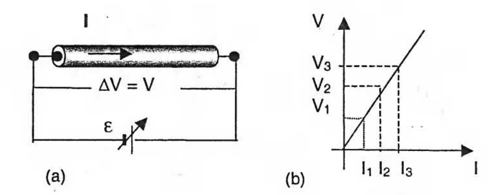


Figura. 12.4

Fig. 12.4a Fuente variable ( ) conectado a un conductor
Fig. 12.4b Relación lineal entre V e I , en un conductor

12.5 MODELO DE CONDUCCION ELECTRICA.

- El modelo considera que los conductores metálicos son arreglos regulares de átomos conformando una red cristalina que contiene una gran cantidad de electrones libres. Los electrones libres se mueven aleatoriamente como lo hacen las moléculas de un gas contenido en un recipiente, con una rapidez media del orden de 10^6 m/s. Si no hay campo eléctrico el flujo neto de carga o electrones libres a través de una determinada sección es nulo. La velocidad promedio de los electrones es cero.
  Cuando el conductor es sometido a un campo eléctrico (E), los electrones modifican sus movimientos aleatorios (la figura 11.5 muestra la trayectoria de un electrón modificado por el campo eléctrico) siendo arrastrados en sentido opuesto al campo eléctrico **E**, con una velocidad de arrastre v_d del orden de 10^{-4} m/s. En el modelo el exceso de energía que el campo

eléctrico **E** entrega a los electrones libres se pierde en choques inelásticos con los núcleos o iones incrementando la energía térmica de los átomos.

El campo eléctrico acelera a los electrones libres de masa m

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{qE}{m} \Rightarrow v = at$$

por los constantes choques con los iones o núcleos, podemos considerar una velocidad media de arrastre de los electrones v_d y el tiempo entre choques Γ

$$v_d = v_m = \frac{1}{2}at \Rightarrow v_d = \frac{q\Gamma}{2m}E$$

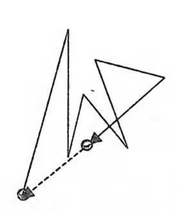
Γ: tiempo entre choques

Pero: $J = nqv_d \Rightarrow J = nq\left(\frac{q\Gamma}{2m}E\right) \Rightarrow J = \frac{nq^2\Gamma}{2m}E$

$\sigma = \frac{nq^2\Gamma}{2m} \Rightarrow$ conductividad (propiedad microsópica del material)

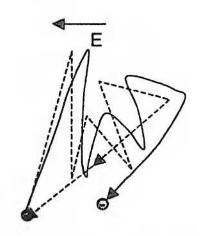
Por lo tanto: $J = \sigma E \Rightarrow J = \frac{1}{\rho}E$ (12.6)

$\rho = \frac{2m}{nq^2\Gamma}$ (resistividad del conductor metálico)



Trayectoria promedio aleatoria de un electrón, cuando no hay campo eléctrico **E** = 0

(a)



Trayectoria aleatoria de un electrón modificado por el campo eléctrico (**F** = **E**q)

(b)

Figura 12.5

- RESISTIVIDAD (ρ) En el modelo de conducción se pone en evidencia que la resistividad depende del arreglo molecular del medio, de las impurezas, de la vibración molecular y otros factores. Es una característica particular de cada medio por el cual pasa la corriente. (es la inversa de la conductividad: $\rho = 1/\sigma$).

  - RESISTENCIA Y RESISTIVIDAD

    Depende del material (características microscópicas: ρ) y las características geométricas.

    Densidad de corriente en el conductor formula 11-6

$$J = \frac{E}{\rho} = \frac{I}{A}$$

Si: $E = \frac{V}{L} \Rightarrow J = \frac{V}{\rho L} = \frac{I}{A} \Rightarrow \frac{V}{I} = \rho \frac{L}{A}$

De: 11.5 $R = \frac{V}{I} = \rho \frac{L}{A} \Rightarrow \boxed{R = \rho \frac{L}{A}}$ (12.7)

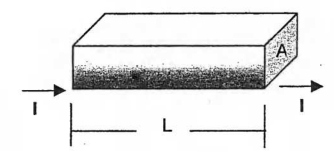


Figura 12.6

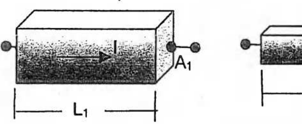
L = Longitud recorrida por la corriente (m).
A = Área de sección por el cual pasa la corriente (m^2)
ρ = Resistividad del material (Ω.m)

- Ejemplo: Usando una determinada masa de grafito en polvo se moldea un paralelepípedo cuya base es cuadrada obteniéndose una resistencia entre sus bases de 2 Ω. Si con la misma masa de grafito se moldea otro paralelepípedo con una base cuadrada cuya área es el 25% de la anterior, ¿Cual será (en Ω) la nueva resistencia entre sus bases?

Solución:

Se quiere obtener: $R_2 = \rho \dfrac{L_2}{A_2}$

Para volúmenes iguales: $V_1 = V_2 \Rightarrow L_1 A_1 = L_2 A_2 \Rightarrow L_1 A_1 = L_2 A_1/4$
$L_2 = 4 L_1$



$R_1 = \rho L_1 / A_1 = 2\Omega$

Por lo tanto: $R_2 = \rho L_2 / A_2 = \rho 4L_1 / (A_1/4) = 16\rho L_1 / A_1$

$R_2 = 16 R_1 \Rightarrow R_2 = 16\text{x}2\ \Omega \Rightarrow$ $\boxed{R_2 = 32\ \Omega}$

12.6 VARIACIÓN DE LA RESISTENCIA CON LA TEMPERATURA

La resistencia del medio por el cual pasa la corriente depende de varios factores. Para determinados conductores metálico su resistividad aumenta con la temperatura creciente.

- COEFICIENTE TERMICO DE LA RESISTIVISDAD (α_t)

$$\alpha_t = \frac{1}{\rho_0}\frac{\Delta\rho}{\Delta T} \quad : \quad \left[\frac{1}{^{\circ}C} \text{ o } \frac{1}{K}\right] \qquad (12.8)$$

ρ_o = resistividad a una temperatura referencial T_0

$\Delta\rho = \rho - \rho_o$

$\Delta T = T - T_o$

En: 12-8 $\alpha_t = \dfrac{\rho - \rho_o}{\rho_o\, \Delta T} \Rightarrow \alpha_t\, \rho_o \Delta T = \rho - \rho_o$

Por lo tanto: $\rho = \rho_0 (1 + \alpha_t\ \Delta T)$ (12.9)

La tabla muestra valores de resistividad y coeficiente térmico:

Sustancia	resistividad a 20°C(Ω m)	Coefi. Térmico (/ºC)
Cobre	$1,69 \times 10^{-8}$	$3,9 \times 10^{-3}$
Plata	$1,59 \times 10^{-8}$	$3,8 \times 10^{-3}$
Aluminio	$2,83 \times 10^{-8}$	$4,0 \times 10^{-3}$
Silicio	$2,30 \times 10^{3}$	$-5,0 \times 10^{-3}$

- Considerando que $\alpha_t >> \alpha$ se pueden despreciar los efectos de la dilatación del material, puede considerarse que la resistencia (R) es proporcional a la resistividad (ρ):

$\Delta R = R_0 \alpha (\Delta T)$

$$\alpha_t = \frac{1}{R_0}\frac{\Delta R}{\Delta T} \quad \Rightarrow \quad R = R_0 (1 + \alpha_t \Delta T) \qquad (12.10)$$

- ♦ CONDUCTORES METALICOS.- Su resistividad aumenta al aumentar la temperatura (Fig. 12.8a)
- ♦ SEMICONDUCTORES.- Su resistividad disminuye al aumentar la temperatura y al disminuir la temperatura su resistividad aumenta (Fig. 12.8b)
- ♦ SUPER CONDUCTORES.- Su resistividad disminuye al disminuir su temperatura, pero al llegar a cierta temperatura critica Tc, su resistividad cae súbitamente a cero experimentando el fenómeno de la super conductividad (Fig. 12.8c)

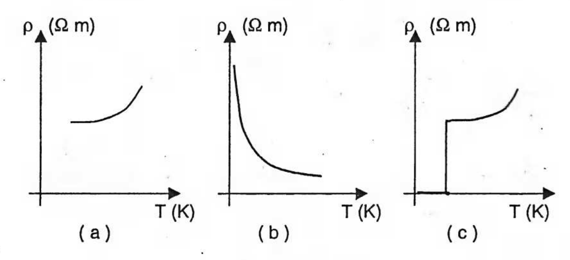


Figura 12.8

12.7 MATERIALES OHMICOS Y NO OHMICOS.-

- MATERIALES OHMICOS.- Son elementos que cumplen con la ley de Ohm. (Fig. 12.9). La pendiente de la grafica es constante.

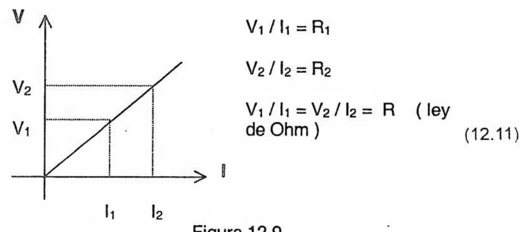


Figura 12.9

- MATERIALES NO OHMICOS.- Son aquellos que no cumplen con la ley de Ohm. Fig. 12.10a: Para elementos semiconductores y Fig. 12.10b: Para electrolitos. Las pendientes de estas graficas no son constantes.

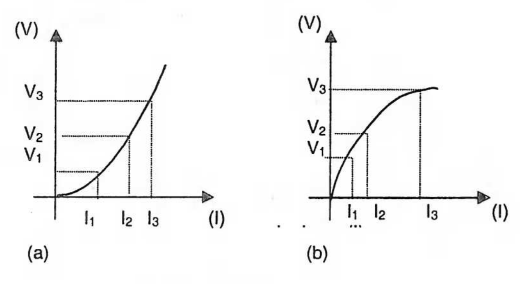
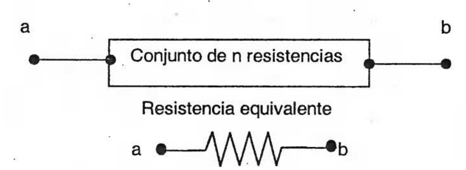


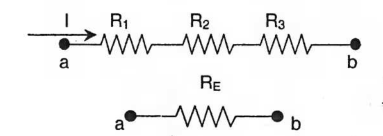
Figura 12.10

12.8. ASOCIACION DE RESISTENCIAS .

- RESISTENCIA EQUIVALENTE (R_{eq}).- Es aquella resistencia entre dos puntos (a y b) capaz de remplazar o sustituir a un conjunto de resistencias, permitiendo el paso de la misma corriente a la misma diferencia de potencial



- RESISTENCIA EN SERIE.- Es aquella disposición ente dos puntos (a y b) en la cual la corriente que circula por cada resistencia es igual a la que circula por la resistencia equivalente.



* Propiedades de n resistencias en serie:

- $I_1 = I_2 = I_3 = \dots\dots\dots\dots = I_n = I_E$
- $V_1 + V_2 + \dots\dots\dots + V_n = V_E$

Por definición de resistencia: $V = R\,I$

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 + \dots\dots + R_n I_n = R_E I_E$$

Pero: $I_1 = I_2 = I_3 = \dots\dots\dots\dots = I_n = I_E$

- $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots\dots + R_n$
- $R_{eq} = \sum_i R_i$ (12.12)

- RESISTENCIAS EN PARALELO.- Es aquella disposición de resistencias entre dos puntos (a y b), en la cual la diferencia de potencial en cada una de ellas es igual a la diferencia de potencial de la resistencia equivalente, como muestra las figuras: 12.13a y 12.13b.

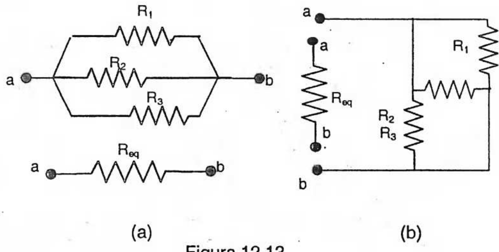


Figura 12.13

*Propiedades de n resistencias en paralelo:

- $V_1 = V_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots V_n = V_E$
- $I_1 + I_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + I_n = I_E$

Por ley de Ohm: $I = V / R$

$$V_1 / R_1 + V_2 / R_2 + \ldots\ldots\ldots + V_n / R_n = V_E / R_E$$

Pero: $V_1 = V_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots V_n = V_E$

- $1 / R_E = 1/R_1 + 1/R_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 / R_n$

- $$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{\sum_i R_i} \qquad (12.13)$$

- Para n resistencias iguales: $R_E = R / n$
- Para dos resistencias R_1 y R_2 : $R_{eq} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (12.14)

Ejemplo: Hállese la resistencia entre a y b. Todas las resistencias son iguales ($R = 5\ \Omega$)

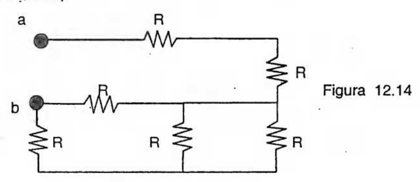
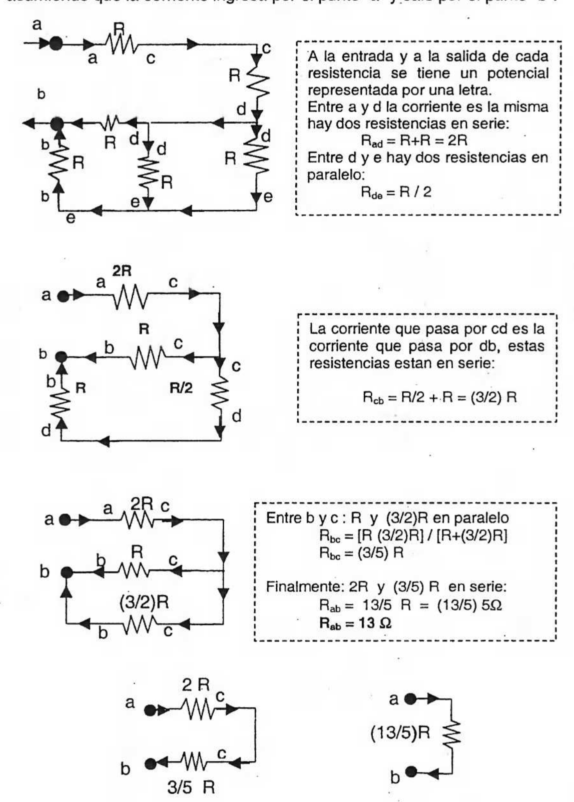


Figura 12.14

Solución:

El sistema de resistencias se resuelve progresivamente, teniendo en cuenta las corriente y diferencia de potencial en cada una de las resistencias, asumiendo que la corriente ingresa por el punto "a" y sale por el punto "b".

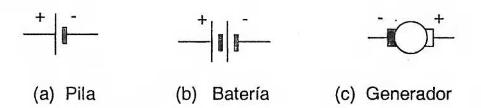


Respuesta: La resistencia entre a y b es: (13/5) 5 Ω = 13 Ω

12.9 FUENTE O GENERADOR.-

- Para mantener una corriente continua en un circuito cerrado, es necesario un dispositivo que mantenga una diferencia de potencial constante y que transporte la carga desde el potencial mas bajo (negativo) hacia el potencial mas alto (positivo) entregándole energía potencial eléctrica. Este dispositivo es la fuente, pila (a), batería (b) generador (c).

- Representación de una fuente:



(a) Pila (b) Batería (c) Generador

Figura 12.14

- FUERZA ELECTROMOTRIZ (fem o ε).- Es el trabajo del agente externo ($W_{ext.}$) no electrostático: químico, mecánico u otras formas de energía por unidad de carga (q) que recorre el circuito cerrado.

$$\varepsilon = \frac{W_{ext}}{q} \quad : \quad \left[\frac{\text{joule}}{\text{coulom}} = \text{voltio} = \text{V}\right] \qquad (12.15)$$

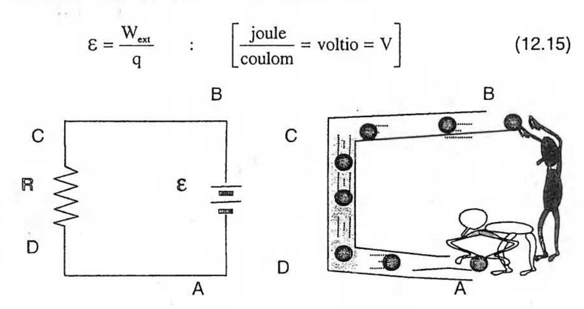


Figura 12.15

En la Fig. 12.15 se muestra el símil gravitacional para con la fuerza electromotriz, el hombrecillo al levantar las esferas del punto A de menor energía potencial al punto B de mayor energía potencial, entrega trabajo para que las esferas recorran el circuito, tal como lo hace la fem en el circuito eléctrico, el fluido en el tramo CD disipa la energía de las esferas, análogamente como lo hace la resistencia eléctrica R con el paso de las cargas eléctricas.

- FUENTE REAL e IDEAL

En la fuente ideal Fig. 12.15a el aumento de energía potencial es igual al trabajo no electrostático W_{ext}

Energía potencial = Trabajo no electrostático

$$q\,\Delta V = \varepsilon\, q \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \varepsilon \qquad (12.16)$$

En la fuente real Fig. 12.15b. se considera la resistencia interna r de la fuente, que disminuye la energía potencial.

$$V_{ab} = \Delta V = \varepsilon - i\,r \qquad (12.17)$$

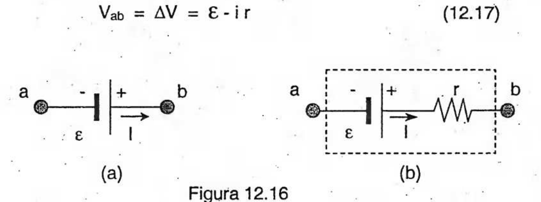
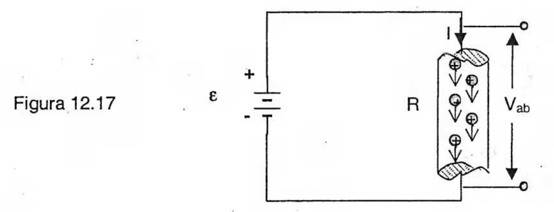


Figura 12.16

12.10 CIRCUITO ELECTRICO

- Para establecer una corriente estacionaria en un conductor con resistividad ρ, debe encontrarse en una trayectoria cerrada o circuito cerrado que debe contener un dispositivo que realice trabajo sobre las cargas para moverlas desde un punto de menor potencial hacia uno de más alto potencial, llamada fuente de fem (pilas, baterías, generadores. celdas solares, termopares, etc).
  El diagrama muestra un circuito completo, donde el conductor tiene una resistencia **R**. la diferencia de potencial entre los terminales a y b establece un campo eléctrico en el interior del conductor, que provoca un flujo de corriente alrededor del circuito desde a hasta b con magnitud $I = V_{ab} / R$

Figura 12.17



◊ CIRCUITO ELEMENTAL CON INSTRUMENTOS DE MEDICION

Para analizar un circuito eléctrico se dibuja un circuito esquemático, tal como se muestra en la Fig. 12.18, donde se observa un amperímetro, que mide la corriente y un voltímetro que mide la diferencia de potencial entre los terminales.

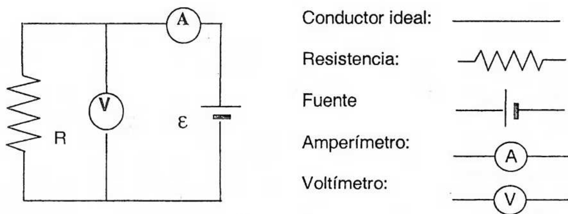


Figura 12.18

Conductor ideal: Conductor a través del cual la caída de tensión que la corriente experimenta es despreciable.
Resistencia o resistor: Conductor a través del cual la corriente que la atraviesa experimenta una caída de tensión.
Fuente: Es el elemento que eleva la tensión para mantener una diferencia de potencial constante en el circuito cerrado (entrega el trabajo para que los portadores de carga recorran el circuito cerrado.)
Amperímetro: Instrumento que mide la intensidad de corriente, en el caso ideal su resistencia interna es cero (es conectado en serie).
Voltímetro: Instrumento que mide la diferencia de potencial, en el caso ideal su resistencia interna es de valor infinito (es conectado en paralelo).

◊ CIRCUITO SERIE CON RESISTENCIAS : Es cuando se agrupan las resistencias y las fuentes de potencial en secuencia , con una sola trayectoria para la corriente Fig. 12.19. En un circuito serie se cumplen las siguientes propiedades:

$I = I_{R1} = I_{R2} = I_{R3}$

$\varepsilon = \Delta V_{R1} + \Delta V_{R2} + \Delta V_{R3}$

$R_{ab} = R_1 + R_2 + R_3$

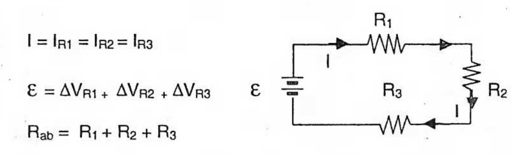


Figura 12.19

- CIRCUITO PARALELO CON RESISTENCIAS : Es cuando se agrupan las resistencias y las fuentes de potencial de manera que la diferencia de potencial sea la misma en cada elemento Fig. 12.20. En un circuito paralelo se cumplen las siguientes propiedades:

$$I = I_{R1} + I_{R2} + I_{R3}$$

$$\varepsilon = \Delta V_{R1} = \Delta V_{R2} = \Delta V_{R3}$$

$$1/R_{ab} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3$$

Figura 12.20

- Ejemplo: Calcular la diferencia de potencial entre los extremos de R_2, y las corrientes que pasan por las resistencia R_2 y R_3 en el circuito donde la fuente tiene una resistencia interna despreciable y ε =12 V

$$R_{ab} = 4 + \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 6\,\Omega$$

$$I = \varepsilon / R_{ab} = 12 / 6 = 2\ A.$$

$$I_2 = 2A \times 3\Omega / (3\Omega + 6\Omega) = 2/3\ A$$

$$I_3 = 2A \times 6\Omega / (3\Omega + 6\Omega) = 4/3\ A$$

$$\Delta V_{R2} = I_2 \times R_2 = 2/3 \times 6 = 4\ V.$$

Figura 12.21

12.11 LEYES DE KIRCHHOFF

- Son regla útiles para resolver circuitos eléctricos con mas de una malla, desarrolladas por el físico alemán Gustav Robert Kirchhoff

- REGLA DE LOS NODOS : La suma algebraica de las corrientes que entran y salen en un nodo es cero. Entendiéndose por nodo como un punto donde se encuentran tres o más conductores.

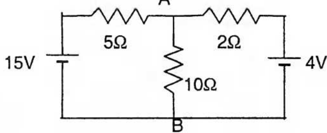
$$\sum_i I_i = 0 \qquad (12.18)$$

Ejemplo : $I_1 + I_2 - I_3 = 0$

Figura 12.22

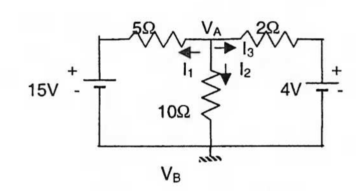
Problema de Aplicación: En el circuito determinar el potencial entre los puntos A y B

Figura 12.23



Solución:

1. En el circuito se puede apreciar dos nodos , El número de ecuaciones mínimas que se pueden utilizar es uno.
2. Asumamos que las corrientes en el nodo A salen y el potencial en dicho nodo es V_A y el potencial en el nodo de referencia es $V_B = 0$ V .
3. La ecuación en el nodo uno es $I_1 + I_2 + I_3 = 0$



$$I_1 = (V_A - 15) / 5$$
$$I_2 = (V_A - 0) / 10$$
$$I_3 = (V_A - 4) / 2$$

Si: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

$V_A/5 - 3 + V_A/10 + V_A/2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8\,V_A/10 = 5$

4. El potencial en el nodo A es :

$V_{AB} = 6.25$ V Respuesta: $V_{AB} = 6{,}25$ V

- REGLA DE LAS MALLAS : La suma algebraica de las diferencias de potencial en cualquier malla es cero. Entendiéndose por malla cualquier una trayectoria cerrada.

$$\sum_i \varepsilon_i + \sum_i V_i = 0 \qquad 12.19$$

$$\varepsilon - V_1 - V_2 - V_3 = 0$$

V_1 V_2 V_3 ε

Figura 12.24

Problema de Aplicación: En el circuito determinar el potencial entre los puntos A y B

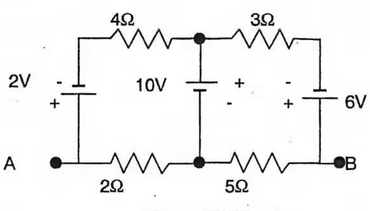
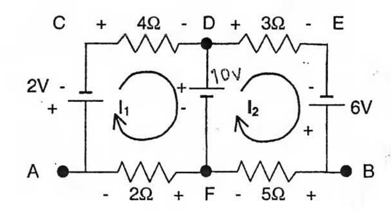


Figura 12.25

Solución:

1. En el circuito se puede apreciar tres mallas. El número de ecuaciones mínimas que se pueden utilizar son dos.
2. Asumamos que las corrientes en las mallas 1 y 2 tienen sentido horario y elegimos los recorridos: CDFA y DEBF



3. Escribir las ecuaciones

Malla CDFAC: $-4I_1 - 10 - 2I_1 - 2 = 0$
$6I_1 = -12$
$I_1 = -2$ A (Se debe cambiar el sentido asumido de corriente)

Malla DEBFD: $-3I_2 + 6 - 5I_2 + 10 = 0$
$8I_2 = 16$
$I_2 = 2$ A

4. El potencial $V_{AB} = 2(2) + (-2)(5) = -6$ V

Respuesta: $V_{AB} = -6$ V

12.12 POTENCIA ELECTRICA

Es la rapidez con que la corriente eléctrica se transforma en otro tipo de energía como energía lumínica, energía calorífica, energía mecánica, etc.

- EFECTO JOULE

La experiencia demuestra que al pasar una corriente por un conductor metálico (resistencia), la temperatura de esté aumenta, es decir, se calienta y el conductor disipa calor, este fenómeno se denomina efecto Joule.

Cálculo de la potencia térmica (P) trasmitida al conductor:

W : Trabajo para mover una carga q través de una diferencia de potencial ΔV.

$$W = (\Delta V)\, q$$

q : Carga que atraviesa el conductor en un tiempo: Δt.

$$q = I\, \Delta t$$

$$W = (\Delta V)\, I\, (\Delta t)$$

P : Potencia disipada en el conductor $P = W / \Delta t$

$$P = \Delta V \cdot I \cdot (\Delta t / \Delta t) = \Delta V \cdot I$$

Por definición de resistencia: $\Delta V = R\, I \Rightarrow P = R\, I^2$

$$P = R I^2 \quad : \quad \left[\Omega A^2 = \frac{J}{s} = W\right] \qquad (12.20)$$

$$P = 0{,}24\, R I^2 \quad : \quad \left[\frac{cal}{s}\right] \qquad (12.21)$$

- POTENCIA SUMINISTRADA POR LA FUENTE (P_s).- La energía entregada por la fuente al circuito, dado en 12.16

$$P_s = W / \Delta t = \mathcal{E}\, q / t = \mathcal{E}\, I \quad : \quad [W] \qquad (12.22)$$

- Ejemplo: Determínese el tiempo que requiere una resistencia de 50 Ω conectada a una tensión de 100 V, sumergida en un recipiente de capacidad calorífica despreciable con un litro de agua a 20 °C para que el agua comience a hervir.

Solución:

Calor requerido por el agua: $Q = m\ c\ \Delta t \Rightarrow Q = 1000x1(100 - 20)$
$Q = 80\ 000$ cal

Potencia que entrega la resistencia: $P = V^2 / R \Rightarrow P = 100^2 / 50$

$P = 200$ W $= 200 \times 0.24$ cal/s $= 48$ cal/s

Calculo del tiempo: $Q = P\,t \Rightarrow t = Q / P$

$t = 80\ 000 / 48$ s $\Rightarrow t = 1\ 666$ s $\Rightarrow t = 27$ min, 46 s

El agua comience a hervir en: 27 min.; 46 s.

12.13 INSTRUMENTOS DE MEDIDA:

- Para medir las magnitudes eléctricas se utilizan diferentes métodos e instrumentos basados en fenómenos físicos como el de la acción mutua entre el conductor por el que pasa una corriente y un campo magnético externo(Torque en una espira). Por ahora tan solo estudiaremos sus conexiones en el circuito e interpretación de los registros de algunos de estos instrumentos.

- GALVANOMETRO.- Es un instrumento muy sensible el cual nos indica si pasa o no corriente en una rama del circuito Fig. 12.26. Se conecta en serie.

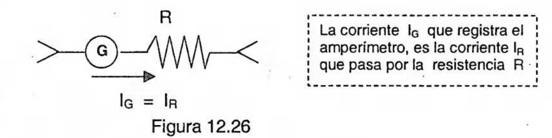


Figura 12.26

- AMPERIMETRO.- Es un instrumento que registra la corriente, por ello se conecta en serie con el elemento cuya corriente interesa Fig. 12.27. El amperímetro tiene una resistencia interna muy pequeña R_A, en el caso ideal su resistencia es cero $R_A = 0\ \Omega$.

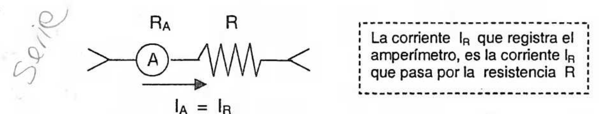


Figura 12.27

- VOLTIMETRO.- Es un instrumento que registra la diferencia de potencial por ello se le conecta en paralelo con el elemento cuya diferencia de potencial interesa Fig. 12.28. El voltímetro tiene una resistencia interna R_V muy grande, en el caso ideal su resistencia es de valor infinito $R_V = \infty$

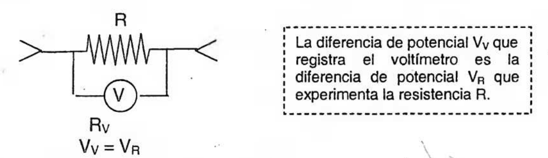


Figura 12.28

- MEDICION DE CORRIENTE (I) Y DE TENSION (V).- Para realizar estas mediciones simultáneamente se tiene las dos posibilidades mostrados en la Fig. 12.29a y Fig. 12.29b

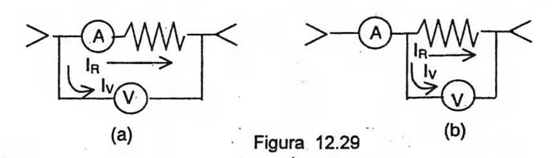


Figura 12.29

En el arreglo de la Fig. 12.29a, el amperímetro registra la corriente (I_R) que pasa por la resistencia, pero el voltímetro registra la suma de las diferencias de potencial ($V_A + V_R$) del amperímetro y la de la resistencia.

En el arreglo de la Fig. 12.29b, el voltímetro registra la diferencia de potencial (V_R) de la resistencia, pero el amperímetro registra la suma de corrientes ($I_R + I_V$) que pasan por la resistencia y por el voltímetro.

- Al conectar un amperímetro real y/o voltímetro real en un circuito en condiciones que en los casos anteriores se mostraron, sus registros tienen errores, respecto a las corrientes o tensiones que se tienen sin su presencia en el circuito.

Ejemplo; Compárese los registros del amperímetro (R_A = 0,5 Ω) y del voltímetro (R_V = 1 kΩ) en el circuito, Con los valores ideales de corriente y diferencia de potencial.

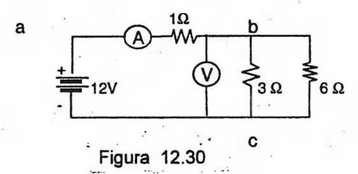


Figura 12.30

Solución:

Valores ideales:

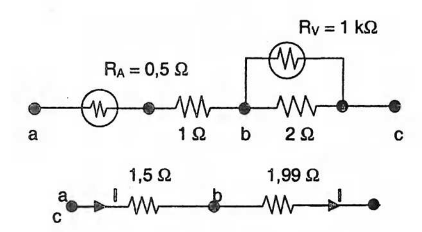
6Ω
1Ω
a b c
3Ω

a 1Ω b 2Ω c
I
I_{ac}

El amperímetro ideal registraría: $I = V_{ac} / R_{ab} = 12/3 = 4$ A

El voltímetro ideal registraría: $V_{bc} = I\ R_{bc} = 4 \times 2 = 8$ V

Registros del amperímetro y voltímetro:



$R_{ab} = 1 + 0{,}5 = 1.5\Omega$ $\qquad R_{bc} = (2 \times 1000) / (2+1000) = 1{,}99\ \Omega$

Corriente en el amperímetro real: $I = V_{ac} / R_{ac}$

$I = 12/(1{,}5+1.99) = 3{,}43$ A

Diferencia de potencial en el voltímetro: $V_{ac} = (I)\ R_{bc}$

$V_{bc} = 3.43 \times 1{,}99 = 6{,}82$ V

Respuesta: Comparación de los registros y valores ideales:

Corriente ideal: 4 A

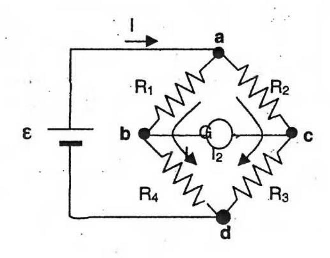
Amperímetro valor registrado : 3,43 A

Diferencia de potencial ideal: 8 V

Voltímetro valor registrado: 6,82 V

** **Los resultados muestran los errores de los instrumentos de medición, estos valores reales se acercaran a los ideales, cuando la resistencia del amperímetro R_A sea mas pequeña y la resistencia del voltímetro R_V sea mas grande.**

- PUENTE DE WHEATSTONE.- Es el dispositivo mostrado en la Fig. 11.31. Se le utiliza para hacer mediciones de resistencias. Se puede afirmar que el sistema esta equilibrado cuando no pasa corriente por el galvanómetro G, en estas condiciones la corriente I_1 que pasa por la resistencia R_1 pasa por R_4 y la corriente I_2 que pasa por R_2 pasa por R_3



Por ley de Ohm:

$V_a - V_b = R_1 I_1$ y $V_a - V_c = R_2 I_2$

Pero: $V_b - V_c = r_G I = 0$ $(I = 0)$

$V_b = V_c$

Se cumple que: $R_1 I_1 = R_2 I_2$
$R_4 I_1 = R_3 I_2$

Dividiendo miembro a miembro:

$R_1 / R_4 = R_2 / R_3 \Rightarrow R_1 R_3 = R_2 R_4$

Fig.12.31

Si se conocen las magnitudes de tres resistencias, se puede obtener el valor de la cuarta resistencia.

PROBLEMAS

1. Dos electrodos se encuentran en una solución de Cloruro de Sodio, llegando en 15 segundos $3{,}25 \times 10^{16}$ iones de Na^+ al electrodo negativo y $6{,}75 \times 10^{16}$ iones de Cl^- al electrodo positivo. Calcular la corriente que se establece entre los dos electrodos.

Respuesta. 1,06 mA.

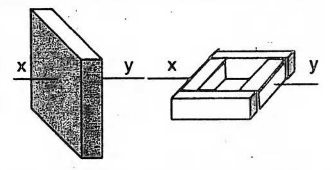
2. Si en el interior de un conductor ohmico de 5 m de longitud se tiene un campo eléctrico de 20 V/m, la corriente es de 2 A. Determínese la diferencia de potencial (en V) que debe tener entre sus extremos para que la corriente sea de 10 A .

Respuesta. 500 V

3. En un conductor de 500 m de longitud y 4 mm de diámetro se le aplica un potencial de 24 voltios obteniéndose una corriente de 8 ampere. Determinar la resistividad del material en Ω.m.

Respuesta. $7{,}5 \cdot 10^{-2}$ Ωm

4. La placa metálica que se muestra tiene una resistencia de 18 Ω entre x e y. Si la placa es cortada en 4 partes iguales y se hace el arreglo mostrado, calcúlese la nueva resistencia.



Respuesta. 320 Ω

5. La resistencia de un conductor se incrementa en 40 % cuando su temperatura varia de 25 °C a 73 °C luego de 20 segundos de conectado. determinar el coeficiente térmico de resistividad del material.

Respuesta. $8{,}3 \times 10^{-3}$ /°C

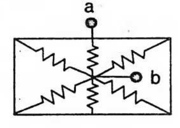
6. Calcular la magnitud de la corriente que circula por un alambre de nicrom a 58°C (α = 0,0004 / °C), si cuando a 20°C se le somete a una diferencia de potencial de 6 V circula por el una corriente de 4,5 A.

Respuesta. 4,43 A

7. Una resistencia R sometida a una diferencia de potencial de 28 V disipa una potencia de 55 W a la temperatura de 22°C . Calcular la magnitud de la temperatura después de varios horas cuando la potencia disipada en la resistencia es de 35 W. (α_T = 0,004 / °C)

Respuesta. 165°C

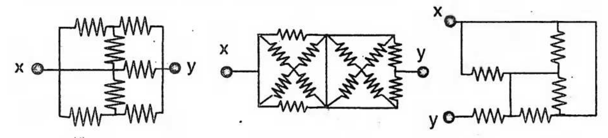
8. En el circuito determinar el valor de la resistencia equivalente entre los puntos a y b. Todas las resistencias son iguales (R = 54 ohm)



9.

Respuesta. 9 Ω

10. En cada caso los arreglos contienen resistencias iguales (R = 12 Ω). Hállese la resistencia equivalente entre x e y.

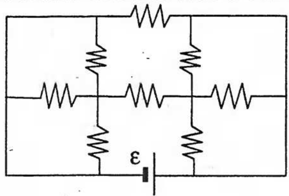


Respuesta. 9 Ω ; 10Ω; 15Ω

11. Tres resistencias de diferentes valores se les conecta en forma independiente a una fuente de potencial ε obteniéndose para cada caso una corriente de 3A, 6A y 9 A . Calcular el valor de la fuente ε si cuando se les conecta en paralelo a las tres resistencias la corriente es 18 A.

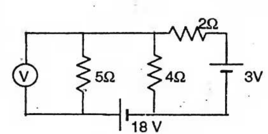
Respuesta. 18 V

12. En el circuito todas las resistencias son igual a R = 16 Ω. Determine la potencia que la fuente disipa interiormente (en W), si ε = 22 V y su resistencia interna es r = 1 Ω



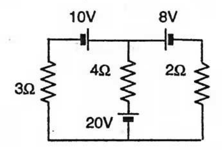
Respuesta. 5W

13. En el circuito mostrado determinar el registro en el voltímetro ideal en voltios.



Respuesta. 11,5V

14. Calcule la diferencia de potencial (en V) en las resistencias de 3 Ω y 4 Ω respectivamente.



Respuesta. 1,38 V ; 8,6 V.

15. Una fuente de 90 V conectada a un arreglo de dos resistencias en paralelo hace circular una corriente de 19 A, pero al medir el potencial en las resistencias con un voltímetro de resistencia interna R_V = 100 ohm este indica 81.36 V . Calcular la magnitud de la resistencia interna de la fuente.

Respuesta. 0,5 Ω

16. En un circuito en serie formado por una fuente ε y una resistencia de 36 Ω se instala un amperímetro de resistencia interna R_A. Determinar la resistencia del amperímetro para que el error en la medida de la corriente sea del 3 %

Respuesta. 1,11 Ω.

17. En una terma cuya capacidad calorífica es de 200 cal/°C se tiene 50 lt de agua. Si su resistencia es conectada a una fuente de 100 V, debe de transcurrir media hora para que la temperatura se eleve en 40 °C: Calcúlese (en Ω) la magnitud de la resistencia

Respuesta.

Capitulo 

Electromagnétismo



Hans Christian Oersted (1770-1851)

Profesor danés, descubrió experimentalmente que una corriente eléctrica podía producir un efecto magnético.

INTRODUCCIÓN

Desde la época de los griegos se sabía que cierto material (magnetita) llamado comúnmente imán, tenía la propiedad de atraer piezas de hierro. Además existen referencias escritas del uso de imanes en la navegación desde el siglo XII.

En 1269, Pierre de Maricourt descubrió que si una aguja se deja libremente en distintas posiciones sobre un imán esférico, se orienta a lo largo de líneas que, rodeando al imán, pasan por puntos situados en extremos opuestos de la esfera. Estos puntos fueron llamados polo norte y polo sur del imán.

En 1600, William Gilbert descubrió que la tierra es un gran imán natural con polos magnéticos cerca a los polos geográficos. En 1760, John Mitchell hizo un estudio cuantitativo de la atracción y repulsión de los polos magnéticos, descubriendo la semejanza con la ley de fuerza entre las cargas eléctricas, pero la diferencia es que los polos magnéticos son inseparables. Asimismo, en semejanza al caso eléctrico, la interacción magnética entre dos imanes, puede ser expresada como la influencia del **campo magnético** generado por uno de ellos sobre el otro imán.

La conexión entre la electricidad y el magnetismo se hizo cuando Hans C. Oersted descubrió, en 1820, que una corriente eléctrica influye sobre la orientación de la aguja de una brújula. Poco después, André M. Ampère, como consecuencia de sus experimentos con imanes que atraen limaduras de hierro y que corrientes paralelas se atraen entre sí, propuso un modelo teórico para el magnetismo, sostenía que el

magnetismo de un imán permanente se debía al alineamiento de espiras moleculares de corriente dentro del material. Actualmente se sabe que estas espiras de corriente resultan parcialmente del movimiento de los electrones dentro del átomo y parcialmente del espín electrónico, una propiedad que la física moderna le atribuye al electrón.

En 1831, Michael Faraday, Joseph Henry y H. F. Lenz demostraron mediante experimentos independientes que un campo magnético variable produce un campo eléctrico (inducción electromagnética). Alrededor de 1860 Clerk Maxwell desarrolló la teoría completa de la electricidad y el magnetismo, según la cual un campo eléctrico variable produce un campo magnético variable.

13.1 Magnetismo.-

Denominamos **magnetismo** a la rama de la física que estudia las propiedades que poseen determinadas sustancias como los minerales de hierro, cobalto y níquel de atraer ciertos cuerpos tales como pedazos de hierro.

13.1.1 Imanes

Las sustancias o dispositivos que poseen magnetismo se denominan imanes, entre los cuerpos que por naturaleza poseen esta propiedad, imanes naturales, se distingue la magnetita (Fe_3O_4) y los que lo han adquirido mediante algún tratamiento especial se denominan imanes artificiales.
Los imanes se caracterizan por lo siguiente:

- Los imanes poseen regiones denominados **polos magnéticos.** Existen dos polos llamados norte y sur.
- Los polos magnéticos no se pueden separar, hasta hoy no existe evidencia experimental de polos aislados (monopolos).
- Entre los polos magnéticos se ejercen fuerzas atractivas y repulsivas. Polos iguales se repelen y polos diferentes se atraen.

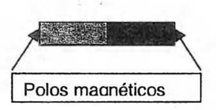


Figura 13.1 Barra imán, sus polos están cerca de los extremos.

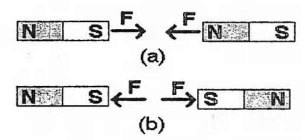


Figura 13.2 Interacción entre polos, (a) polos diferentes se atraen; y (b) polos iguales se repelen.

Ejemplo. La tierra es un gran imán.

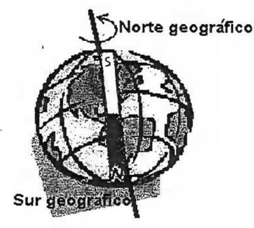
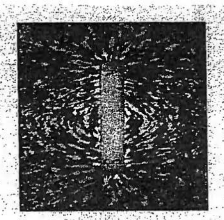


Figura 13.3 El imán terrestre tiene su polo sur magnético cerca al polo norte geográfico, y el polo norte magnético cerca al polo sur geográfico. Nótese que el eje geográfico y el eje N-S magnético no coinciden.

13.2 Campo magnético (B)

Es una cantidad vectorial que describe las propiedades especiales que adquiere el espacio que rodea un imán.
El imán crea en su entorno un campo magnético, cuya dirección en un punto se determina por la orientación que adopta un pequeño imán que puede rotar libremente alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro (brújula), colocado en aquel punto. El campo magnético **B** se expresa en tesla (T) en el SI.



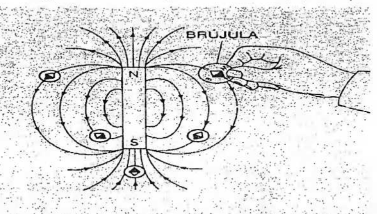


Figura 13.4 A la izquierda se muestra una barra imán y la distribución de limaduras de hierro en su entorno. A la derecha el esquema correspondiente, mostrando las líneas de fuerza y la orientación de la brújula señalando la dirección del campo magnético.

Los campos magnéticos se representan por líneas cerradas, denominadas líneas de inducción magnética, pasan a través del imán y externamente se dirigen del polo norte al polo sur. El campo magnético es tangente a esta línea.

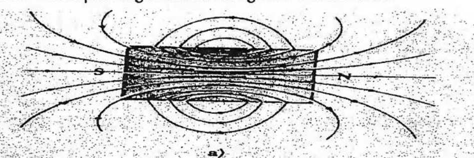


Figura 13.5 Se muestra las líneas de fuerza a través del imán y el carácter cerrado de las líneas.

Pregunta: ¿Solamente los imanes producen efectos magnéticos?

13.3 Experimento de Oersted

El magnetismo se fue desarrollando con el estudio de las propiedades de los imanes. Antes de 1820 no se sospechaba que pudiera existir alguna relación entre los fenómenos magnéticos y eléctricos. El magnetismo y la electricidad se consideraban dos ramas diferentes de la física independiente.
A principios del siglo XIX **HANS CHRISTIAN OERSTED** fue quien por primera vez observó un hecho experimental que cambiaría radicalmente este punto de vista. Al hacer pasar una corriente por el circuito que se muestra en la figura observo que la aguja magnética se desviaba, tendiendo a orientarse perpendicularmente al alambre AB. Descubriendo así la existencia de una relación estrecha entre la electricidad y el magnetismo: **Una corriente eléctrica produce efectos magnéticos.**

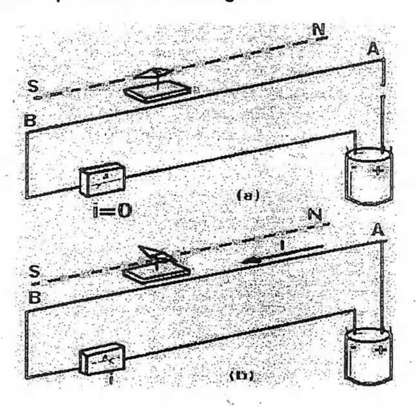


Figura 13.6 (a) No hay corriente en el alambre AB y la brújula se mantiene orientada hacia el norte. (b) Hay corriente en el alambre AB y la brújula se reorienta, debido al efecto magnético de la corriente.

13.4 Fuerza magnética sobre una carga eléctrica

El campo magnético **B** en un punto del espacio ejerce una fuerza **F** sobre una partícula cargada q que se mueve con una velocidad **v**.
Observaciones experimentales permiten afirmar:

- La fuerza magnética es proporcional a la carga q y a su rapidez v ($F \propto qv$).
- Si la velocidad v de la partícula forma un ángulo θ con las líneas de **B**, se encuentra que: ($F \propto \text{sen}\theta$).
- Finalmente, como la fuerza también depende de B, la proporcionalidad se convierte en una igualdad, en donde B es la constante de proporcionalidad.

Finalmente, combinando estas observaciones se obtiene:

$$F = q\,v\,B\,\text{sen}\theta$$

que en su forma vectorial se expresa como:

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B} \qquad (12.1)$$

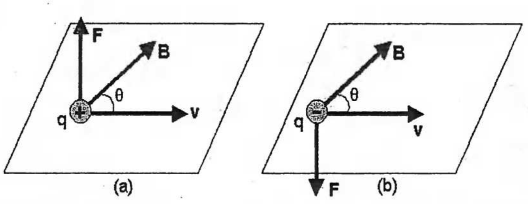


Figura 13.7 La fuerza **F** es perpendicular al plano que contiene a los vectores **v** y **B**. En (a) la carga es positiva; y en (b) la carga es negativa y **F** se invierte.

En el SI la unidad del campo magnético, el tesla (T) es: 1 T = N / A m. Es usual emplear también la unidad gauss (G) y su equivalencia es: 1 T = 10^4 G.

13.4.1 Movimiento de partículas cargadas en el interior de un campo magnético uniforme

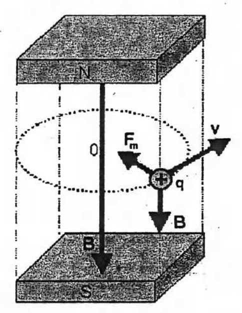


Figura 13.8 Carga q con velocidad **v** perpendicular a un campo magnético uniforme **B**.

Consideremos una partícula con carga +q y velocidad **v** en una región en donde existe un campo magnético uniforme **B** como el que se muestra en la figura 13.8.

Como: **v** ⊥ **B**, entonces F_m = q v B (figura) Por la acción de esta fuerza la partícula se moverá en una trayectoria circular con rapidez constante (M.C.U.).

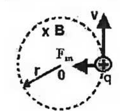


Figura 13.9 Vista superior del movimiento circular de q (M.C.U.).

Como F_m es la fuerza centrípeta responsable de este movimiento, entonces:

$$F_m = F_C = q\,v\,B = m\,v^2 / r$$

en donde:
r = radio de la trayectoria circular = m v / q B
v = rapidez = r q B / m
T = periodo = 2π m / q B = qB / w
ν = frecuencia = q B / 2π m

Ejemplo
Una partícula con carga q = 1μC y 0,1 mg de masa, ingresa con una rapidez de 100 m/s perpendicularmente a una región en donde existe un campo magnético uniforme de 1T, como se muestra en la figura 13.10. Determinar el sentido de su recorrido y la distancia respecto del punto de ingreso en que abandona la región.

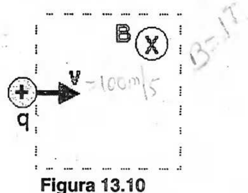


Figura 13.10

Solución

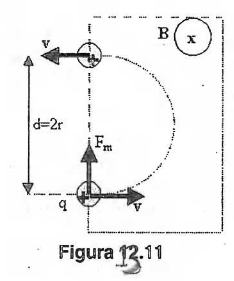


Figura 13.11

La carga q al ingresar a la región en donde existe el campo magnético uniforme B, experimenta una fuerza magnética F_m como se muestra en la figura 13.11, obligando a la partícula a describir una trayectoria circular de radio r, abandonando la región a una distancia de su punto de ingreso igual a 2r.
Aplicando la regla del producto vectorial y teniendo en cuenta que: $\mathbf{F}_m = q\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$

$$F_m = q\,v\,B = m\,v^2/r \ldots\ldots\ldots\ r = m\,v/q\,B$$
$$r = 1\times10^{-4} \times 50 / 2 \times 10^{-6} \times 1 = 2{,}5\ m$$
$$\text{de donde: } d = 5\ m$$

13.4.2 Campos eléctricos y magnéticos combinados

Cuando una partícula cargada q en movimiento, está sujeta simultáneamente a la acción de campos eléctricos y magnéticos, la fuerza total **F** que actúa sobre ella es la suma vectorial de la fuerza eléctrica q **E**, y la fuerza magnética q **v** × **B** , o lo que es lo mismo:

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E} + q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (13.2)$$

Denominada la **fuerza de Lorentz.**

Analizar el movimiento de una partícula en una región en donde existen estos campos es muy complicado. Sin embargo, son simples y útiles de analizar aquellos casos en donde los campos **E** y **B** son paralelos o perpendiculares entre sí.

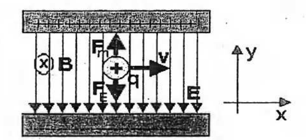


Figura 13.12 Carga en movimiento en una región donde existe un campo eléctrico **E** uniforme y un campo magnético **B** uniforme, perpendiculares entre sí.

Ejemplo
En la figura 13.12, determine la rapidez de la partícula para que esta no se desvíe de su trayectoria.

Solución

$$F_e = q\,\mathbf{E} = -q\,\mathbf{j} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots F_m = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q\,v\,B\,\mathbf{j}$$

Como la partícula no sufre desviación: $\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_m = 0 \ldots\ldots\; q\,E\,(-\mathbf{j}) + (q\,v\,B)\,\mathbf{j} = \mathbf{0}$
Entonces: $-q\,E + q\,v\,B = 0$, luego $v = E / B$

13.5 Fuerza sobre un conductor con corriente

Cuando una corriente I fluye en un alambre recto de longitud L ubicado en una región en donde existe un campo magnético uniforme **B**, sobre el alambre se ejerce una fuerza **F** cuya expresión esta dada por la ecuación:

$$\mathbf{F} = I\,\mathbf{L} \times \mathbf{B} \qquad (13.3)$$

En donde el vector **L** tiene el sentido de la corriente y su módulo es la longitud del alambre.
Para entender este resultado consideremos un alambre recto de longitud L de sección transversal A por la que circula la corriente I perpendicular a un campo magnético uniforme que apunta hacia dentro del papel.

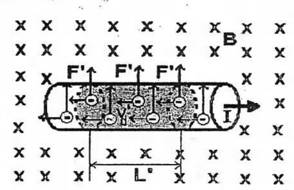


Figura 13.13 Sobre cada electrón que se mueve con velocidad $\mathbf{v}_d$ se ejerce una fuerza **F'**.

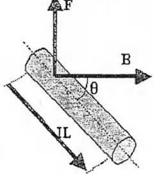
Sea n el número de electrones libres por unidad de volumen que circula por el alambre. El número de electrones libres en esta longitud L es: n A L,
Sobre un electrón q se ejerce una fuerza magnética **F´** de magnitud igual a $q\,v_d\,B$.
Por lo que el módulo de la fuerza total sobre los electrones que se encuentran en este volumen es. $F = (n\,A\,L)\,q\,v_d\,B$.
Pero sabemos que $I = n\,q\,v_d\,A$, por lo tanto:

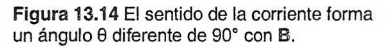
$$F = I\,L\,B$$

Vectorialmente:

$$\mathbf{F} = I\,\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

Esta ecuación se aplica al alambre por el que circula la corriente I y que no necesariamente es perpendicular al campo **B**, como el caso de la figura 13.14.




Figura 13.14 El sentido de la corriente forma un ángulo θ diferente de 90° con **B**.

Ejemplo 13.3
Un alambre de 1 m de longitud y de 0.2 kg de masa por el que circula una corriente de 2 A es colocado en una región en donde existe un campo magnético uniforme **B** como se muestra en la figura 13.15. Determinar la magnitud de **B** si el resorte se deforma 2 cm cuando no circula corriente, y 6 cm cuando circula corriente por el alambre.

Solución

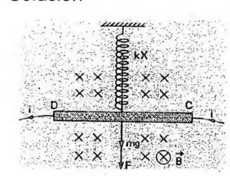


Figura 13.15 Alambre suspendido por resorte.

Aplicando la regla de la mano derecha:
$\mathbf{F} = -\mathbf{i}\, L\, B\, \mathbf{j}$
Cuando no circula corriente por el alambre:
$\Sigma F_y = 0$: $m\, g = k\, x_1$ $\quad 2\ N = k \times 0{,}02$
de donde $k = 100\ N/m$
Cuando circula corriente por el alambre:
$\Sigma F_y = k\, x_2 - m\, g - i\, L\, B = 0$

de donde: $B = (k\, x_2 - m\, g)\, /\, i\, L = (100 \times 0{,}06 - 2)\, /2 \times 1$
$B = 2\ T$

Ejemplo 13,4
Determinar la fuerza magnética (en N) que actúa sobre el alambre conductor, ubicado en una región en donde existe un campo magnético de 0,5 T, como se muestra en la figura 13.16 (a) si la corriente es de I = 1 A y su longitud L = 2 m.

Solución

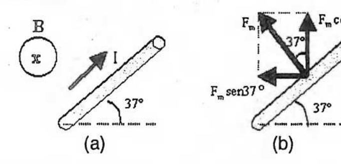


Figura 13.16 Fuerza sobre un conductor.

Aplicando la regla del producto vectorial, la fuerza magnética es como se muestra en la figura 13.16 (b), por lo tanto:

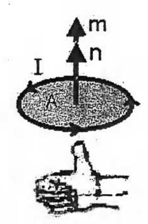
$\mathbf{F}_m = -F_m \mathrm{sen}37°\, \mathbf{i} + F_m \cos 37°\, \mathbf{j}$
Siendo: $F_m = I\, L\, B = 1 \times 2 \times 0{,}5 = 1\ N$
Finalmente: $\mathbf{F}_m = (-0{,}6\, \mathbf{i} + 0{,}8\, \mathbf{j})\ N$

13.6 Momento magnético de una espira

Consideremos una espira circular de área A, por la que circula una corriente I como la que se muestra en la figura 13.17. Definimos como **momento magnético m** de la espira al vector:

$$\mathbf{m} = I\, A\, \mathbf{n} \qquad : [\, A\, m^2\,] \qquad (13.4)$$

Donde **n** es el vector unitario normal al plano de la espira cuyo sentido se determina por la regla de la mano derecha.



Regla de la mano derecha:
Curve los dedos de la mano derecha en el sentido de la corriente, el pulgar extendido da el sentido del vector **n** y del momento magnético **m**.

Figura 13.17 Muestra la regla de la mano derecha para encontrar la orientación del momento magnético de la espira.

Si la espira consta de N vueltas el momento magnético se expresa como: N **m**

13.7 Torque sobre una espira con corriente eléctrica

La espira con corriente colocada en el interior del campo magnético uniforme experimentará una rotación debido a un torque τ creado sobre la espira.

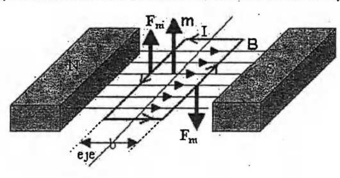


Figura 13.18 Se muestra las fuerzas sobre los lados de una espira inmersa en un campo magnético **B**. El eje pasa por el centro de masa de la espira.

En la figura 13.18 se muestra una espira rectangular de lados a y b. Sobre los tramos de longitud b no se ejercen fuerzas por ser paralelos al campo magnético. Los otros dos tramos, de longitud a, son perpendiculares al campo, por tanto la magnitud de la fuerza magnética sobre cada uno es B I a. Dichas fuerzas constituyen un par de fuerzas que hacen girar la espira alrededor del eje, como se muestra en la figura 13.18.

La magnitud del torque respecto del eje es:

$\tau = IAB$ En donde: A = área de la espira = a b.

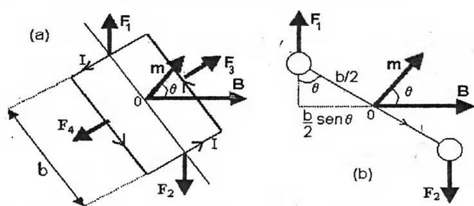


Figura 13.19 (a) ilustra las fuerzas sobre cada lado de la espira así como **m** y **B. La figura 13.19b** es una vista lateral.

Las fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ forman un par, por lo tanto producen un torque respecto a cualquier punto, por ejemplo el punto 0.
De la figura 13.19 (b) observamos que $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ producen un torque resultante respecto del punto 0, que se expresa por:

$$\tau_0 = N\,\mathbf{m} \times \mathbf{B} \qquad (13.5)$$

En donde N el número de espiras

Ejemplo 13.5

Una bobina cuadrada de lado a = 5 cm y constituida por 50 espiras que puede girar alrededor del eje z como se muestra en la figura 13.20, se encuentra bajo la influencia de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 2\mathbf{j}$ mT. Si la corriente que circula por la bobina es de 0,5 A, determinar el torque que actúa sobre la bobina en el instante mostrado.

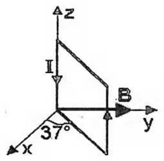


Figura 13.20

Solución

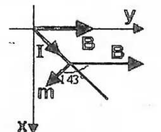


Figura 13.21

Aplicando la regla del producto vectorial, la bobina gira en el sentido antihorario.
Su magnitud es: $\tau = |\mathbf{m} \times \mathbf{B}| = m\,B\,\text{sen}143°$
Pero: $m = N\,I\,A = 50 \times 0{,}5 \times (0{,}05)^2 = 0{,}0625$ A m^2
Reemplazando:
$\tau = 0{,}0625 \times 2 \times 10^{-3} \times 0{,}6 = 75 \times 10^{-6}$ N m

Ejemplo 13.6

A través de una bobina de 100 vueltas circula una corriente de 1 A que se encuentra al inicio bajo la acción de un campo magnético uniforme de 0,5 T paralelo al plano de la bobina como se muestra en la figura 13.22. Determine el ángulo θ y el sentido de rotación de la bobina en el instante en que la magnitud del torque sea la mitad del torque inicial.

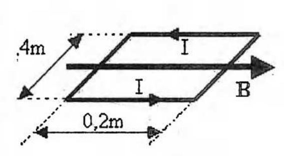
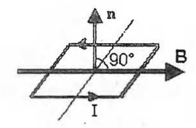


Figura 13.22

Solución





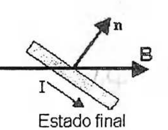


Figura 13.23

Estado inicial: $\tau_i = N\,I\,A\,B$.............Estado final: $\tau_f = N\,I\,A\,B\,\text{sen}\theta$
Pero: $\tau_f = 0{,}5\,\tau_i$................$N\,I\,A\,B\,\text{sen}\theta = 0{,}5\,N\,I\,A\,B$..........simplificando: $\text{sen}\theta = 0{,}5$
Finalmente: $\theta = 30°$.

13.8 Campo magnético de un conductor rectilíneo

El campo magnético **B** de una corriente rectilínea es descrito por líneas de inducción circulares centradas en la posición de la corriente y contenidas en planos perpendiculares al conductor. El sentido del campo magnético se determina por la **regla de la mano derecha (RMD)**: tomar el conductor con la mano derecha de modo que el pulgar indique el sentido de la corriente, los otros dedos indican el sentido del campo magnético, como se muestra.

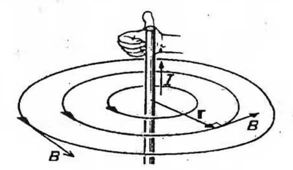


Figura 13.24 Líneas de inducción de la corriente de un conductor muy largo. Se muestra la RMD.

La intensidad del campo magnético **B** en un punto a una distancia **r** de la corriente I es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N / A^2 = $4\pi \times 10^{-7}$ T m / A, se llama permeabilidad magnética del vacío, que se mide experimentalmente. En la mayoría de materiales la permeabilidad magnética es aproximadamente $\mu \approx \mu_0$

Ejemplo 13.7 Fuerza entre corrientes paralelas
Dos conductores muy largos paralelos con corrientes I e I', en el mismo sentido, se encuentran separados una distancia r. Calcule la fuerza por unidad de longitud en cada conductor.
Solución

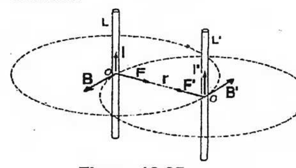


Figura 13.25

El campo magnético **B** creado por la corriente I en la posición de I' es: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. La fuerza magnética sobre un segmento de longitud L', debida a B es:

$F = I' L' B \operatorname{sen} 90° = I' L' \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)$, por tanto la fuerza por unidad de longitud es:

$$\frac{F'}{L'} = \frac{\mu_0 I I'}{2\pi r}$$

Ejercicio. Demostrar que la fuerza por unidad de longitud sobre el alambre por el que circula la corriente I tiene la misma forma que la ecuación anterior. Ver (figura 13.25).

13.8 1 Definición de Ampere

Con el ejemplo anterior estamos en condiciones de definir formalmente el **ampere**. "Si por dos conductores rectos muy largos separados una distancia de 1 m circulan corrientes iguales, se define la corriente en cada uno de ellos como de 1 ampere si la fuerza por unidad de longitud sobre cada conductor es 2 x 10^{-7} N/m".

13.9 Campo magnético debido a una espira circular

Considere un conductor circular con corriente I de radio r como el mostrado en la figura 13.26. Observe que las líneas cerradas que rodean a la corriente, no son circulares. La dirección del campo magnético **B** se obtiene aplicando la regla de la mano derecha. La intensidad del campo magnético en general es muy compleja, sin embargo en el centro la expresión es sencilla:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

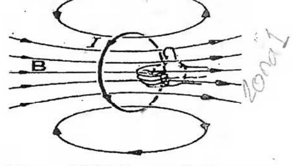


Figura 13.26 Campo **B** de una espira circular, se indica la RMD.

La espira circular produce un campo magnético equivalente a la de un pequeño imán perpendicular al plano de la espira.

Ejemplo 13.8

Por un aro de platino ($\alpha = 4 \times 10^{-3}$ /°C) de radio R_0 a temperatura ambiente, circula una corriente I_0. ¿En qué porcentaje disminuye el campo magnético en el centro, cuando la temperatura del aro se incrementa en 500 °C, si la corriente no varia?

Solución

A temperatura T_0, el campo magnético en el centro es $B_0 = \frac{\mu_0 I_0}{2R_0}$, a la temperatura T = $T_0 + \Delta T$, el radio del aro es $R = R_0(1 + \alpha\Delta T) = R_0(1 + 4 \times 10^{-3} \times 500) = 3R_0$, y el campo magnético en el centro es $B = \frac{\mu_0 I_0}{2R} = \frac{\mu_0 I_0}{2(3R_0)} = \frac{\mu_0 I_0}{3(2R_0)} = \frac{B_0}{3}$, luego el porcentaje es $\frac{B - B_0}{B_0} x100\% = \frac{\frac{B_0}{3} - B_0}{B_0} x100\% = -67\%$. El signo negativo se interpreta como reducción del campo magnético.

13.10 Campo magnético de un solenoide

Se denomina solenoide al sistema formado por varias espiras paralelas recorridas por la misma corriente I (ver figura 13.27). Observe que en el exterior prácticamente se anulan las líneas de **B**, y en el centro se refuerzan paralelamente al eje del solenoide produciendo un campo uniforme, cuya intensidad es:

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I = \mu_0 n I$$

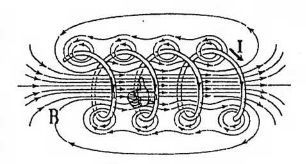


Figura 13.27 Campo **B** de un solenoide. Se muestra la RMD.

donde N = número de espiras; L = longitud del solenoide; n = número de espiras por unidad de longitud.
Un solenoide se considera ideal si $L >> D$, siendo D = diámetro del solenoide.

Ejemplo 13.9
Se construye un solenoide con espiras muy juntas (R = 2cm) con L = 50π m de alambre de 1 mm de radio. Si la corriente en el alambre es 2 A, calcule el campo magnético en el centro del solenoide. ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m / A)

Solución

El número de espiras.

$$N = \frac{L}{l_{vuelta}} = \frac{60\pi}{2\pi(0{,}02)} = 1500 \text{ vueltas}$$

La longitud de solenoide es L' = N (2r) = 1500 x (2 x 0,001) = 3 m. E campo en el centro del solenoide es dado por:

$$B = \mu_0 \frac{N}{L'} I = 4\pi \times 10^{-7} \frac{1500}{3} 2 = 4\pi \times 10^{-4} \text{ T}.$$

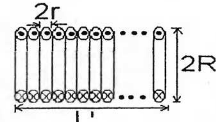


Figura 13.28

13.11 Flujo Magnético (φ)

Está relacionado con el número de líneas de campo magnético **B** que atraviesa una superficie **S** perpendicular a la dirección del campo. El flujo magnético φ se define como:

$$\varphi = B S \cos\theta \quad : \quad [\text{Wb}]$$

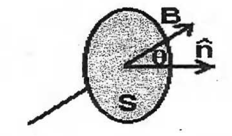


Figura 13.29 Flujo del campo **B** a través de **S**. n̂ es normal a S.

La unidad es el weber (Wb). 1 Wb = 1 T·m^2.

En la figura 13.29 se observa que θ es el ángulo que forma **B** con el vector n̂ perpendicular al plano de la superficie.

13.12 Inducción electromagnética

En la figura 13.30 se muestra que un imán al moverse verticalmente respecto de la bobina genera una corriente en ésta que es registrada por el galvanómetro. Si se mantiene estacionario el imán no se detecta corriente. En (b) utilizamos en vez del imán una bobina con corriente y movemos respecto de la otra bobina registrándose corriente a través de esta última. En (c) ambas bobinas están estacionarias, al abrir o cerrar el interruptor de corriente por la bobina interna, se registra una corriente que circula por la otra bobina. Este fenómeno se llama **inducción electromagnética**. De los experimentos anteriores se colige que el flujo del campo magnético variable a través de la bobina produce una **corriente inducida** y la respectiva Fem que la produce se llama **FEM inducida**.

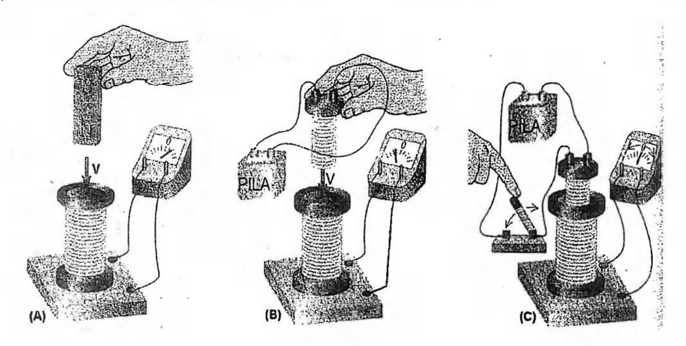


Figura 13.30 Experimentos de inducción electromagnética. En la figura (B) se muestra la equivalencia de imán con una bobina con corriente

13.13 Ley de Inducción de Faraday

De los experimentos similares a los descritos en la figura 13.30 Faraday dedujo:

" La fem inducida en un circuito cerrado, real o imaginario, es igual a la variación de flujo magnético $\Delta\varphi$ a través de la espira por unidad de tiempo Δt".

Se expresa por:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

La unidad de ε es el volt, 1 V = 1 $Wb \cdot s^{-1}$. Cuando hay N espiras, la fem es:

$$\varepsilon = N\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Ejemplo 13.10

Un aro de madera de área S, tiene su plano perpendicular a un campo magnético cuya magnitud depende del tiempo como se muestra en la figura 13.31. Halle la fem inducida en el aro.

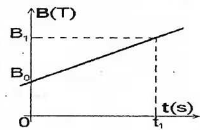


Figura 13.31

Solución

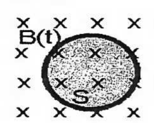


Figura 13.32

De la figura se deduce que la función campo magnético es $B(t)=B_0+\left(\frac{B_1-B_0}{t_1-t_0}\right)t=B_0+\frac{\Delta B}{\Delta t}t$, donde $m=\frac{\Delta B}{\Delta t}$ es la pendiente constante de la recta y $t_0 = 0$ s. Aplicando la ley de Faraday, calculando el flujo φ en t_0 y t.

$$\varepsilon=V=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{BS\cos 0^0-B_0S\cos 0^0}{t-t_0}=S\left(\frac{B-B_0}{t-t_0}\right)=S\,m$$

Ejemplo 13.11

Sobre una varilla metálica doblada en U, la barra AC de longitud L se desliza con velocidad constante **v** en presencia de un campo magnético **B** constante, perpendicular al plano del papel, ver figura 13.33.

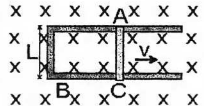


Figura 13.33

Solución

En un tiempo Δt, la barra recorrió Δx = v Δt sobre la varilla, y el aumento del área de la espira es ΔS = L Δx = L v Δt. Aplicando la ley de Faraday:

$$\varepsilon=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\varphi-\varphi_0}{\Delta t}=\frac{BS\cos 0^0-BS_0\cos 0^0}{\Delta t}=B\frac{\Delta S}{\Delta t}=B\frac{L\,v\,\Delta t}{\Delta t}=B\,L\,v$$

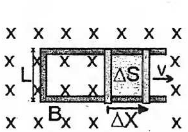


Figura 13.34

Ejemplo 13.12

Una bobina con N espiras de área S, gira con velocidad angular W alrededor de un eje que pasa por un diámetro, en una región donde existe un campo magnético B perpendicular al eje. Halle la fem inducida.

Solución

En este caso $\hat{n}$ es el vector normal al área S y θ es el ángulo que cambia con el tiempo. Aplicando la ley de Faraday:

$$\varepsilon=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\varphi-\varphi_0}{\Delta t}=\frac{NBS\cos(\theta+\Delta\theta)-NBS\cos(\theta)}{\Delta t}=NBS\left(\frac{\cos(\theta)\cos(\Delta\theta)-\text{sen}(\theta)\,\text{sen}(\Delta\theta)-\cos(\theta)}{\Delta t}\right)$$

Si Δt → 0, entonces Δθ →0, vale cos(Δθ) ≈ 1 y sen(Δθ) ≈ Δθ, además del mov. Circular $W=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\theta}{t}$.

Reemplazando y operando en la expresión anterior se obtiene: $\varepsilon=NBSW\,\text{sen}(Wt)=\varepsilon_0\,\text{sen}(Wt)$.

Es fem dependiente del tiempo.

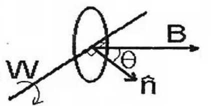


Figura 13.35

13.14 Ley de Lenz

Es otra ley experimental complementaria a la ley de Faraday que establece:

> **"La corriente inducida i en una espira conductora, produce un campo magnético B_i en el interior que se opone a la variación del flujo magnético que la produce".**

Ejemplo 13.13

En la figura 13.36 mostrada, dibuje la corriente inducida en la espira, indique el sentido según un observador desde el imán, y el campo magnético que genera la corriente en el interior de la espira.

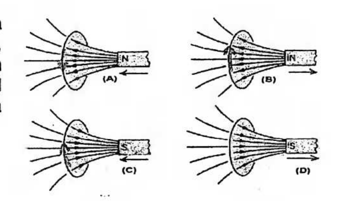


Figura 13.36

Solución

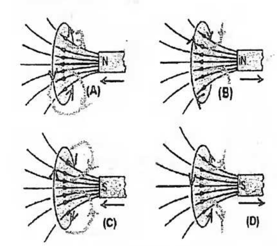


Figura 13.37

En la parte (A) el flujo aumenta, luego por la ley de Lenz, el campo inducido tiene sentido opuesto al campo producido por el imán , por lo que la corriente es de sentido antihorario. En (B) el flujo disminuye, luego el campo inducido tiene el mismo sentido. La corriente es horaria. En (C) El flujo aumenta, luego el campo inducido tiene sentido opuesto. La corriente es horaria. En (D) el flujo disminuye, luego el campo inducido tiene el mismo sentido. La corriente es antihoraria.

13.15 Motor de corriente continua

Es un dispositivo que transforma energía eléctrica en energía mecánica o en trabajo. Es llamado también motor DC.

Un esquema simple es el mostrado en la figura 13.38, el campo magnético **B** es generado por un imán, ε es la Fem de alimentación y **c** son los semi-anillos colectores. Cuando pasa corriente I por la espira (o bobina) aparece un torque τ que hace girar la espira y para mantener el sentido de giro de la espira se utiliza los semi-anillos colectores.

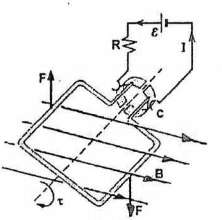


Figura 13.38 Motor DC

Inicialmente la corriente I_0 a través de la resistencia interna R del motor es: $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ (13.)

Al girar la espira el flujo magnético a través de ella cambia y de acuerdo a la ley de Faraday- Lenz se induce una fem ε_i que se opone a la fem ε que la produjo, de este modo la corriente I a través de motor disminuye. Aplicando las reglas de Kirchhoff, al circuito de alimentación del motor, como en la figura 13.39, se obtiene:

$$\varepsilon - \varepsilon_i - IR = 0$$

Figura 13.39 Esquema de un motor DC.

13.16 Corriente Alterna (ca)

Es una corriente que varía armónicamente con el tiempo.

13.16.1 Generador de corriente alterna

Es un dispositivo que transforma algún tipo de energía mecánica en energía eléctrica. Un esquema simple es el que se muestra en la figura 13.40 donde se tiene una espira, de área **S**, que se hace rotar con velocidad angular constante ω en el interior de un campo magnético **B**. Aplicando la ley de Faraday, la fem inducida se expresa por

ε = NBSW Sen(wt)

(ver ejemplo 13.12):

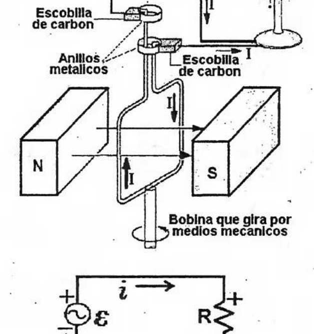


Figura 13.40 Un generador de fem alterna, conectado a una lámpara.

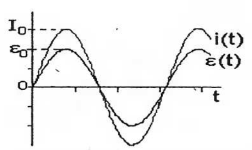


Figura 13.42 Gráfica de fem y corriente en función del tiempo

Figura 13.41 Circuito simple de corriente alterna, es el esquema de la figura 13.40. El sentido de la corriente y los signos corresponden a un semiperíodo

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Donde ε_0 = fem máxima = N B S ω; N es el número de espiras; t es el tiempo.
La corriente que circula por R se halla aplicando la definición de resistencia, y es:

$$i(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Donde $I_0 = \varepsilon_0 / R$ = es la corriente máxima.

13.16.2 Valores eficaces de fem y de la corriente en el circuito de ca

Nótese que tanto la fem como la corriente alterna permanecen el mismo tiempo en un sentido que en otro, por ello su valor medio es cero. Sin embargo, los valores cuadráticos medios no son nulos y son iguales a la mitad del valor máximo, a la raiz cuadrada de éstos se les llama valores eficaces, que se expresan por:

$$\varepsilon_{ef} = V_{ef} = \sqrt{\left\langle \varepsilon_0^2 \operatorname{sen}^2(\omega t)\right\rangle} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_0$$

$$I_{ef} = \sqrt{\left\langle I_0^2 \operatorname{sen}^2(\omega t)\right\rangle} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} I_0$$

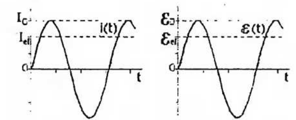


Figura 13.43 Valores eficaces de la corriente y la tensión.

Donde ⟨⟩ significa promedio en el tiempo. ε_{ef} es el valor eficaz de la tensión y I_{ef} es el valor eficaz de la corriente, estos valores son los indicados por los instrumentos de medición de corriente alterna.

13.16.3 Potencia de un circuito de ca

La energía disipada por una resistencia es debida a los choques de los electrones con los átomos de la red, que depende de la intensidad de la corriente pero no depende de la dirección de la corriente. Luego, la potencia instantánea p(t) disipada por la resistencia, se calcula análogamente al caso de corriente continua:

$$p(t) = i^2 R = I_0^2 R \operatorname{sen}^2(\omega t) = P_0 \operatorname{sen}^2(\omega t)$$

Donde $P_0 = I_0^2 R$ es la potencia máxima. Promediando en el tiempo se obtiene la potencia media ó promedio P, que se llama usualmente potencia, ésta es más útil:

$$P = I_0^2 R\left\langle \operatorname{sen}^2(\omega t)\right\rangle = \tfrac{1}{2} I_0^2 R = \tfrac{1}{2} P_0$$

La potencia entregada al circuito por el generador es:

$$P = \left\langle (\varepsilon_0 \operatorname{sen}(\omega t))(I_0 \operatorname{sen}(\omega t))\right\rangle = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 I_0 = \varepsilon_{ef}\, I_{ef}$$

Se puede interpretar que la corriente eficaz I_{ef} es la corriente continua que en un ciclo disipa la misma energía térmica que la corriente alterna a través de una resistencia.

Ejemplo 13.14

En la figura 13.44 la corriente a través de R = 100 Ω es i(t) = 6 sen (120πt) mA. Evalúe la energía disipada por la resistencia de 150 Ω, durante 3000 ciclos.

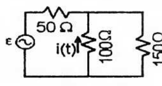


Figura 13.44

Solución

La diferencia de potencial eficaz V_{ef} en los extremos de la resistencia de 100 Ω y la de 150 Ω es la misma, $V_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}R = \frac{6\times10^{-3}}{\sqrt{2}}100 = 0{,}3\sqrt{2}\ V$, y la corriente eficaz es $I_{ef} = \frac{V_{ef}}{150} = 2\sqrt{2}\times10^{-3}\ A$. Por tanto, la energía total disipada es:

$$Q = I_{ef}^2 Rt = 8\times10^{-6}\times150\times3000\left(\frac{2\pi}{120\pi}\right) = 0{,}06\ J$$

13.16.4 Transformadores

Los transformadores son dispositivos que transmiten energía eléctrica de un circuito a otro, mediante el fenómeno de la inducción electromagnética, modificando en general, la fem, la corriente.

Un esquema de un transformador se muestra en la figura 13.45 El núcleo de hierro atrapa las líneas de campo magnético variable generado en la bobina de N_p espiras del circuito primario, debido a su corriente variable i_p. El circuito primario tiene aplicado una fem $V_p = \varepsilon_p$ variable. El campo magnético variable en el núcleo atraviesa las N_s espiras de la bobina del circuito secundario induciendo una fem $V_s = \varepsilon_s$ variable y por lo tanto una corriente i_s. Aplicando la ley de Faraday a cada bobina:

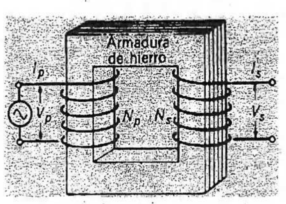


Figura 13.45 Esquema de un transformador. Se denota V = ε = fem.

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_p}{N_p} \qquad \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_s}{N_s}$$

La variación de flujo en cada espira es la misma en ambas bobinas, luego:

$$\frac{\varepsilon_p}{N_p} = \frac{\varepsilon_s}{N_s}$$

Si en el transformador no hay pérdidas de energía en el devanado ó en el núcleo, se llama **transformador ideal** y la potencia P en ambos circuitos es la misma:

$$P = i_p\varepsilon_p = i_s\varepsilon_s$$

comparando con la ecuación anterior, se concluye que:

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} = \frac{i_s}{i_p} = \frac{N_p}{N_s}$$

Estas ecuaciones son válidas para un instante cualquiera y para los valores eficaces.

Ejemplo 13.15

En el circuito secundario (N_s = 200 vueltas) la resistencia es de 50 Ω y la corriente que circula a través de ella es $i_s(t) = 0,3\,\text{sen}(120\pi t)$ A, ¿Cuál es el cambio de flujo magnético por unidad de tiempo en cada espira del circuito primario?

Solución

La fem en el secundario es $\varepsilon_s(t) = (50) \times 0,3\,\text{sen}(120\pi t) = 15\,\text{sen}(120\pi t)$ V. Aplicando la ley de Faraday, $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{\varepsilon_p}{N_p} = \dfrac{\varepsilon_s}{N_s} = 0,75\text{sen}(120\pi t)$ Wb/s

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Determinar la fuerza magnética resultante (en N) sobre el alambre mostrado en la figura 13.46, debido al campo magnético uniforme **B** = -0.5 **k** T, cuando por el alambre circula una corriente de 1 A.

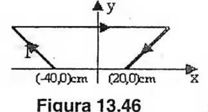


Figura 13.46

A) 0,3 **j** B) 0,4 **j** C) −0,3 **j**
D) −0,4 **i** E) 0,6 **j**

2.- Determinar la velocidad **v** (en m/s) que debe tener la partícula de carga 2 mC y masa 2 $\times 10^{-6}$ kg para que pase por el punto P(2,0,0) m, si el campo magnético uniforme es **B** = 0,8 **k** T

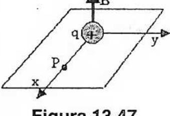
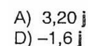


Figura 13.47

A) 3,20 **j** B) −3,20 **j** C) 0,8 **j**
D) −1,6 **j** E) 1,80 **j**



3.- Una partícula con carga de 2 μC ingresa perpendicularmente a una región en donde existe un campo magnético uniforme **B** = 0,5 **k** T con una velocidad **v** = 200 **i** m/s. Determinar la fuerza magnética (en μN) que sobre ella actúa.

A) 100 **j** B) −100 **j** C) 200 **j** D) −200 **j** E) 300 **j**

4.- En determinado instante una partícula cargada se encuentra en la posición $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ cm moviéndose en determinada dirección. Si sobre los ejes X y Y se encuentran alambres conductores muy largos que conducen corriente de igual intensidad I en la dirección positiva de dichos ejes, determine la dirección de la velocidad de la carga, para que en ese instante la fuerza magnética sea nula.

A) $\hat{i} + \hat{j}/\sqrt{2}$ B) $\hat{i} + \hat{j}$ C) $(\hat{i} - \hat{j})/\sqrt{2}$ D) $(\hat{i} - \hat{k})/\sqrt{2}$ E) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

5.- Por dos espiras circulares de igual radio r, circula la misma corriente I = 1 A. Si las espiras tienen el mismo centro y sus planos forman un ángulo de 74°, entonces

el módulo del campo magnético resultante en el centro es 16π μT, evalúe el radio r (en cm). ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T.m/A)

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

6.- Con un alambre de 0,002 m de diámetro, se construye un solenoide de 0,5 m de longitud con espiras muy apretadas. Al reducir en 10 vueltas y alargar la longitud del solenoide se obtiene un campo magnético en el eje que es el 90% del inicial. ¿Cuál es aproximadamente la longitud final (en cm) del solenoide? (Manteniendo la misma corriente)

A) 40,4 B) 45,6 C) 53,3 D) 58,2 E) 63,0

7.- La barra AC mostrada (m = 20 g, L = 20 cm) se mueve con rapidez 0,05 m/s. Si la resistencia del alambre en U es 1 Ω y B = 0,5 T, halle la aceleración (en mm/s^2) inicial de la barra.

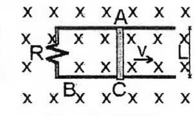


Figura 13.48

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

8.- Si se aumenta continuamente la FEM en la bobina pequeña, entonces, el campo magnético en la bobina grande generado por la corriente inducida es:

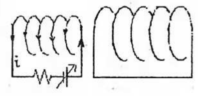
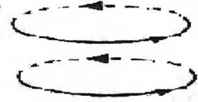


Figura 13.49

A) nulo B) a la izquierda C) a la derecha
D) alterna la orientación E) hacia abajo.

9.- Cuando las espiras conductoras mostradas se acercan entre sí, manteniendo sus planos paralelos, entonces:


Figura 13.50

A) Se repelen B) Se atraen C) No pasa nada
D) gira la espira de arriba E) gira la espira de abajo

10.- En un circuito alimentado por una tensión de $220\sqrt{2}\,\text{sen}(120\pi t)$ está constituido por dos resistencias en paralelo de 90 Ω y 180 Ω. Calcule aproximadamente, (a) La corriente eficaz (en A) mayor a través de una resistencia; y (b) La potencia media (en W) total disipada.

A) 2,4; 807 B) 1,2; 807 C) 2,4; 708 D) 1,2; 708 E) 3,6; 807

11.- Por cada vuelta de la bobina del primario de un transformador ideal pasa $\sqrt{2}$ sen($120\pi t$) Wb/s y es utilizado para reducir una tensión de 11 kV a 220 V, para distribuir la energía en la ciudad. Si en un hogar se consume, en promedio una corriente de 18 A, ¿cuántas vueltas tiene la bobina del secundario?

A) 11000 B) 1100 C) 110 D) 220 E) 440

Capítulo 

Ondas Electromagnéticas y Física Moderna

14.1 ONDAS ELECTROMAGNETICAS

14.1.1 INTRODUCCIÓN

Las ondas electromagnéticas (OEM) están presentes en diferentes fenómenos que observamos a diario. Los rayos del Sol, las ondas de radio y TV, los rayos X y los rayos láser son ejemplos de ondas electromagnéticas. O sea las OEM tienen una presencia importante en nuestras vidas. Cabe destacar que en los últimos avances de la ciencia y la tecnología se hace uso de las OEM. Finalmente, para terminar esta breve introducción, debemos mencionar que algunos se refieren a estos tiempos como la "era de las comunicaciones", y éstas comunicaciones se hacen por medio de OEM principalmente.

14.1.2. NOCION DE OEM

Se tiene una espira conductora en un campo magnético **B** uniforme pero variable en el tiempo. Supongamos que la magnitud del campo aumenta, entonces, según las leyes de Faraday y Lenz, en la espira habrá una fem inducida y, ya que la espira es conductora, también habrá una corriente inducida en el sentido horario (fig. 14.1 a).

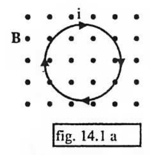


fig. 14.1 a

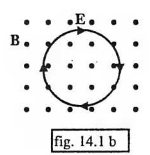


fig. 14.1 b

La fem implica la existencia de un campo eléctrico **E** a lo largo del conductor. Además el sentido de la corriente es el sentido de las líneas de fuerza del campo eléctrico. Entonces las líneas de fuerza del campo **E** estarán dispuestas como se muestra en la figura 14.1 b.

Se comprueba que si la espira es no conductora, no hay corriente inducida pero sí hay fuerza electromotriz inducida y, por ende, campo eléctrico. Por tanto, la existencia del campo eléctrico no depende del tipo de material de la espira.

Ya que la existencia del campo eléctrico no depende del material de la espira sino solamente del campo magnético, entonces si no hubiese espira, existiría igualmente el campo eléctrico **E** en dicho espacio.

*"Un campo **B** variable en el tiempo genera un campo **E**"*
(Ley de Faraday - Henry)

También se comprueba que:

*"Un campo **E** variable en el tiempo genera un campo **B**"*
(Ley de Ampere-Maxwell)

Entonces, haciendo variar apropiadamente un campo **B**, generaremos un campo **E** variable, que a su vez generará un **B** variable, éste generará un **E** variable y así sucesivamente. Entonces se irán autogenerando los campos **E** y **B** y en el espacio tendremos un **campo electromagnético** (es decir en un mismo punto del espacio existirán **E** y **B** al mismo tiempo y serán mutuamente perpendiculares).

B ⊙——► E

Definición de ondas electromagnéticas:
Una onda electromagnética es la propagación del campo electromagnético a través de un medio material o del vacío.

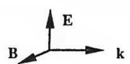
CARACTERÍSTICAS DE UNA OEM

- Las OEM son producidas por cargas aceleradas.
- **E** es perpendicular a **B**.

B (↑) E (→)

- La dirección de propagación está dada por el vector de onda **k**, que tiene la dirección del producto vectorial (**ExB**). El módulo del vector de onda se llama *número de onda* y es igual a:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{(donde } \lambda \text{ es longitud de onda)}$$



- Son ondas transversales, ya que en cada punto del espacio **E** y **B** oscilan perpendicularmente a la dirección de propagación.
- Se propagan en el vacío con una velocidad: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$

donde : ε_o - permitividad eléctrica del vacío
μ_o - permeabilidad magnética del vacío

- La frecuencia depende sólo de la fuente y no cambia al pasar la OEM de un medio a otro. En cambio la longitud de onda cambia cuando la OEM pasa de un medio a otro. El valor de la longitud de onda en un medio determinado se puede obtener sabiendo que la velocidad de propagación en un medio determinado se encuentra por la fórmula:

$$v = \frac{c}{n}$$

n - índice de refracción del medio.

Como para toda onda $v = \lambda\nu$, entonces $\lambda = v/\nu = (c/n)/\nu = (c/\nu)/n = \lambda_o/n$, o sea:

$$\lambda = \frac{\lambda_o}{n}$$

entendiendo por λ_o - la longitud de onda en el vacío.

- Las magnitudes de los campos eléctrico y magnético se relacionan de la siguiente manera:

$$B = \frac{E}{c}$$

- Las OEM transportan energía.

- Densidad de energía (u):
Es la energía por unidad de volumen

$$u = u_E + u_B = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_o} = \varepsilon_o E^2$$

- Intensidad (I):
Es la energía que atraviesa una superficie por unidad de área y por unidad de tiempo.

$$I = cu = c\varepsilon_o E^2$$

La función de onda para el caso particular de ondas armónicas es:

$$E = E_o \text{Sen}(kx - wt)$$
$$B = B_o \text{Sen}(kx - wt)$$
$$\text{donde } B_o = \frac{E_o}{c}$$

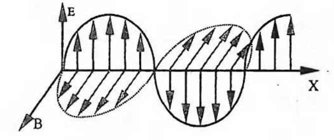


Fig. 14.2

Entonces la densidad de energía y la intensidad de la OEM serían respectivamente:

$$u = \varepsilon_0 E_0^2 \text{sen}^2(kx - wt)$$
$$I = c\varepsilon_0 E_0^2 \text{sen}^2(kx - wt)$$

La densidad de energía y la intensidad son variables en el tiempo. Entonces podemos hablar del valor medio:

Densidad media de energía : $\langle u \rangle = \varepsilon_0 E_0^2/2$
Intensidad media : $\langle I \rangle = c\varepsilon_0 E_0^2/2$

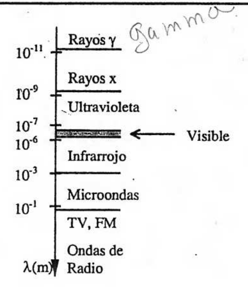
ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO

Es la gama de frecuencias o de longitudes de onda que abarca cada tipo de onda electromagnética.

A continuación se muestra el espectro en términos de la longitud de onda (λ). La correspondiente gama de frecuencias (ν) se puede obtener, considerando que en el vacío $\nu = c/\lambda$, donde c es la velocidad de la luz.

1. Ondas de radio frecuencia (unidades de km > λ > 0,3 m)
2. Microondas ó UHF (0,3 m > λ > 10^{-3} m)
3. Espectro infrarrojo (10^{-3} m > λ > 7,8 x 10^{-7} m)
4. Espectro visible (luz) (7,8.10^{-7} m > λ > 3,8 x 10^{-7} m)
5. Rayos ultravioletas (3,8.10^{-7} m > λ > 6.10^{-10} m)
6. Rayos X (10^{-9} m > λ > 6.10^{-12} m)
7. Rayos Gamma (10^{-10} m > λ > 10^{-14} m)

He a continuación un esquema aproximado de los límites de cada espectro.



Radiación Visible:

Es la radiación que puede ser detectada por el ojo humano. El ojo tiene una membrana llamada retina, que es sensible a esta radiación.

Como ya se ha indicado arriba, su longitud de onda está en el intervalo $3,8.10^{-7}$ m > λ > $7,8 \times 10^{-7}$ m. Sin embargo los límites no son precisos, dependen generalmente de la forma en que se generan las ondas. Algunos experimentadores, haciendo una aproximación gruesa, señalan como límites 4000 Å y 7000 Å.

Al incidir en el ojo producen diferentes sensaciones, que son los colores, los mismos que dependen de la longitud de onda (o de la frecuencia).

COLOR	λ ($\times 10^{-7}$m)
Violeta	3,8 - 4,55
Azul	4,55 - 4,92
Verde	4,92 - 5,77
Amarillo	5,77 - 5,97
Naranja	5,97 - 6,22
Rojo	6,22 - 7,8

La sensibilidad del ojo humano depende de λ.

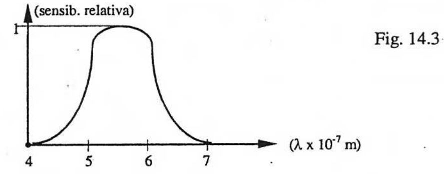


Fig. 14.3

REFLEXION Y REFRACCION DE LA LUZ

Son dos fenómenos que se producen cuando la luz pasa de un medio homogéneo transparente de índice de refracción n_1 a otro medio homogéneo transparente de índice de refracción n_2.

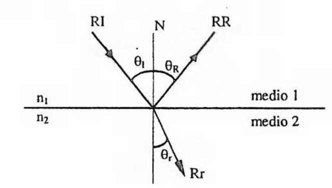


Fig. 14.4

RI - rayo incidente
RR - rayo reflejado
Rr - rayo refractado
N - normal
θ_I - ángulo de incidencia
θ_R - ángulo de reflexión
θ_r - ángulo de refracción
n_1 - índice de refracción del medio 1 (donde está el rayo incidente)
n_2 - índice de refracción del medio 2 (donde está el rayo refractado)

Leyes de la Reflexión y Refracción de la luz:

1. RI, RR, Rr y N están en un mismo plano.

2. $\theta_I = \theta_R$

3. $\frac{n_1}{n_2} = \frac{Sen\theta_r}{Sen\theta_I}$ (Ley de Snell)

Con la finalidad de recordar más fácilmente la Ley de Snell, se pueden cambiar los subíndices de los ángulos de incidencia y de refracción de la siguiente manera:

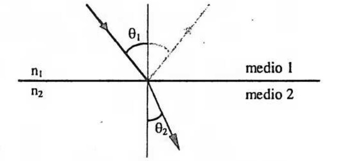


Fig. 14.5

De este modo θ_1 es el ángulo del rayo que viaja en el medio 1 y θ_2 el del rayo que viaja en el medio 2. Entonces la Ley de Snell se escribiría:

$$n_1 \text{ Sen } \theta_1 = n_2 \text{ Sen } \theta_2$$

Ejemplo 14.1

Un buzo mira al Sol bajo un ángulo de 30º con la vertical. ¿Bajo que ángulo con la vertical lo verá una persona que está fuera del agua?.

[θ_2=41,7º]

Reflexión Total:

Se produce cuando los rayos pasan de un medio determinado (de índice de refracción n_1) a otro medio ópticamente menos denso (de índice de refracción n_2).

Que el segundo medio sea ópticamente menos denso significa que su índice de refracción es menor, o sea $n_2<n_1$.

He a continuación una explicación del fenómeno, paso a paso:

- Si, a partir de cierto valor, vamos aumentando paulatinamente el ángulo de incidencia, entonces el ángulo de refracción se irá acercando cada vez más a 90º.
- Para un ángulo de incidencia determinado, que podemos llamar ángulo crítico (θ_c), el ángulo de refracción será 90º y el rayo refractado irá en forma rasante a la superficie de separación de los dos medios.
- Para un ángulo mayor que θ_c, siguiendo la tendencia el ángulo de refracción debería ser mayor que 90º, lo que significaría que el rayo refractado viajaría en el medio inicial, donde está el rayo incidente, y por tanto ya no sería rayo refractado, sino reflejado. O sea ya no existe rayo refractado, en consecuencia el rayo incidente se refleja totalmente (REFLEXION TOTAL).

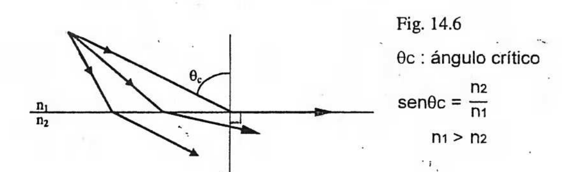


Fig. 14.6

θc : ángulo crítico

$$\text{sen}\theta c = \frac{n_2}{n_1}$$

$n_1 > n_2$

Una aplicación de la reflexión total es el principio de funcionamiento de los endoscopios flexibles de fibras ópticas, que se utiliza en el diagnóstico médico. La

luz que entra por uno de los extremos viaja a lo largo de la fibra, por su interior, sin salir, debido a las múltiples reflexiones totales que sufre.

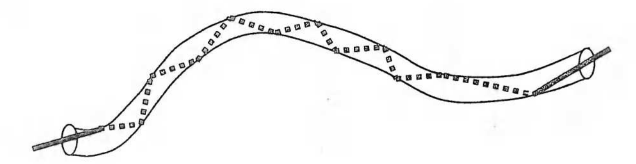


Fig. 14.7

OTROS FENOMENOS QUE SUCEDEN CON LA LUZ

Interferencia

Es la superposición de dos o más ondas, que bajo determinadas condiciones produce en una pantalla un cuadro donde se intercalan regiones de máximos y mínimos de intensidad.

Para esto la ondas deben ser monocromáticas y coherentes. Son monocromáticas cuando sólo corresponden a una longitud de onda y son coherentes cuando se originan en una misma fuente.

La demostración más sencilla de la interferencia es la ideada por T. Young. En este caso la luz monocromática de una fuente pasa por dos rendijas. Las ondas transmitidas por las dos rendijas llegan a una pantalla donde se superponen produciéndose regiones de máximos (franjas brillantes) y mínimos (franjas oscuras) de intensidad.

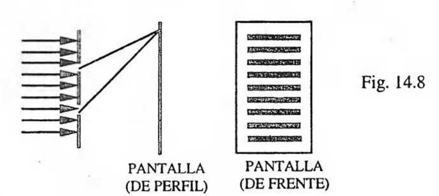


Fig. 14.8

Cuando el desfase es 2π rad (ó λ), entonces se tiene un máximo
Cuando el desfase es π rad (ó $\lambda/2$), entonces se tiene un mínimo.

Difracción

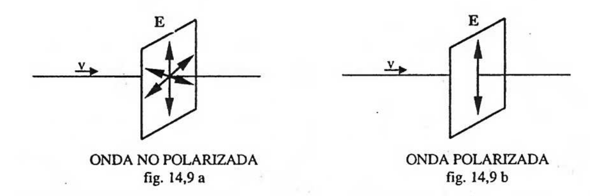
Difracción

Desviación o perturbación del haz por un obstáculo o por una rendija. Como consecuencia se forma un cuadro similar al de la interferencia, o sea de máximos y mínimos que se intercalan.

Polarización

Se dice que **una onda está polarizada linealmente** cuando el vector campo eléctrico **E** oscila siempre en una misma dirección (fig. 14.9,b).

Normalmente un rayo de luz emitido por una fuente tiene al vector **E** oscilando arbitrariamente en cualquier dirección (fig. 14.9,a).



ONDA NO POLARIZADA
fig. 14,9 a

ONDA POLARIZADA
fig. 14,9 b

Se puede polarizar una luz haciendo pasar el haz por un cristal llamado polarizador. La luz que pasa resultará polarizada.

Otra forma de conseguir una luz polarizada es por reflexión (Ley de Brewster).

Ley de Brewster

Si hacemos incidir la luz no polarizada en la superficie de separación de dos medios, entonces para un determinado ángulo de incidencia (θ_P) la luz reflejada estará polarizada en la dirección paralela a la superficie reflejante. Este ángulo de incidencia θ_P debe ser tal, que el refractado sea su complemento ($\theta_P+\theta_r=90°$).

Fig. 14.10

$$\theta_P+\theta_r=90°$$

$$\frac{\text{Sen}\theta_P}{\text{Sen}\theta_r}=\frac{n_2}{n_1}$$

$$\frac{\text{Sen}\theta_P}{\text{Cos}\theta_P}=\text{tg}\,\theta_P=\frac{n_2}{n_1}$$

θ_P n_1 medio 1 n_2 medio 2 θ_r

OPTICA GEOMETRICA

Estudia la propagación de la luz en medios transparentes y homogéneos.

ESPEJOS

Son superficies perfectamente reflectantes, cumplen con las leyes de la reflexión regular.
Estudiaremos los espejos planos y los esféricos.

ESPEJOS PLANOS

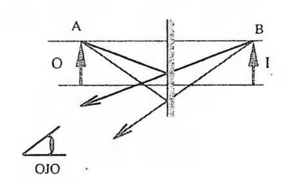


Fig. 14.11

Imagen:
- virtual
- derecha
- O=I

O - tamaño del objeto
I - tamaño de la imagen

Para el ojo los rayos parecen haber partido del punto B y no de A, de donde realmente han partido. Entonces B es la imagen de A.

ESPEJOS ESFERICOS

Son superficies pulidas de forma esférica.

Elementos de un espejo:

- Eje del espejo: es el eje de simetría

- Tres puntos notables:
  - Vértice (V) : intersección eje - espejo
  - Foco (F) : donde convergen rayos incidentes paralelos al eje (o las prolongaciones de los reflejados).
  - Centro de curvatura (C) : centro de la superficie esférica.

- Distancia focal (f) : distancia del Foco al Vértice.
- Radio de curvatura (r): distancia del Centro de curvatura al vértice.

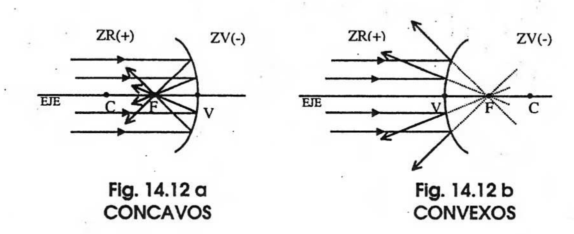
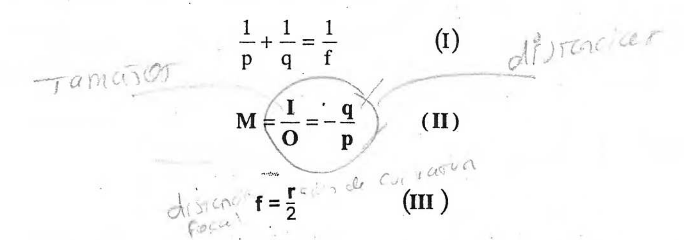


Fig. 14.12 a
CONCAVOS

Fig. 14.12 b
CONVEXOS

-Consideraremos por razones prácticas, que el espejo divide el espacio en dos partes que llamaremos: **ZR(+)** = Zona Real, donde se propagan los rayos reflejados, y toda distancia medida en esta zona es positiva; **ZV(-)** = Zona Virtual, es la parte no pulida del espejo, y toda distancia medida en esta zona es negativa.

ECUACIONES PARA ESPEJOS ESFERICOS:



$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \qquad \text{(I)}$$

$$M=\frac{I}{O}=-\frac{q}{p} \qquad \text{(II)}$$

$$f=\frac{r}{2} \qquad \text{(III)}$$

Donde: p - distancia objeto.
q - distancia imagen.

Convención de signos para las ecuaciones anteriores.

	f	p	q	M
+	Cóncavo	Siempre (objeto real)	Imagen real	Imagen derecha
-	Convexo	Nunca	Imagen virtual	Imagen invertida

RAYOS PRINCIPALES PARA LA FORMACION DE IMAGENES

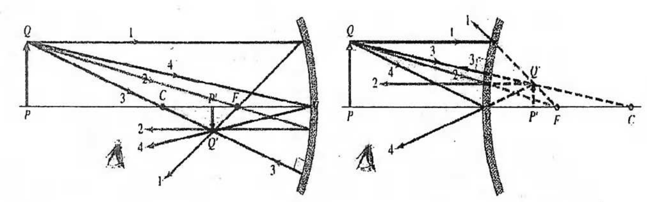


Figura 14.13 Se muestra los rayos principales en un espejo cóncavo.

Figura 14.14 Se muestra los rayos principales en un espejo convexo.

En la figura: PQ es el tamaño objeto O; P´Q´ es el tamaño imagen ; los rayos de trayectoria conocida y que son casi paralelos al eje (rayos paraxiales) son los rayos principales que están numerados. Es suficiente tomar 2 rayos principales para formar una imagen.

La imagen es real:

Cuando se forma con la intersección de rayos reflejados.

La imagen es virtual:

Cuando se forma con la intersección de las prolongaciones de los rayos reflejados.

Veamos el caso cuando p<f:

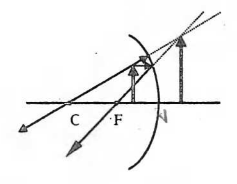


Imagen virtual y derecha h'>h

Fig. 14.15

Veamos el caso de espejo convexo:

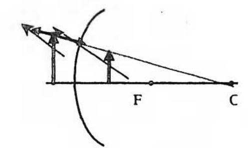


Fig. 14.16

Ejemplo 14.2
Un estudiante desea adquirir un espejo para rasurarse que le permita ver su cara aumentada 50% a 40 cm de sus ojos ¿Qué clase de espejo deberá comprar y que radio de curvatura debe tener?

SOLUCION

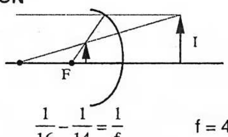


Fig. 14.17

$M = -\frac{q}{p}$

$p + |q| = p - q = 40$

$\frac{1}{16} - \frac{1}{14} = \frac{1}{f}$ $f = 48$ cm $R = 2f = 96$ cm

LENTES

Son dispositivos transparentes que, se supone que refracta toda la luz que incide sobre ella.
Estudiaremos las lentes delgadas esféricas; son de dos tipos: convergentes (↕) y divergentes ( ) ( ) . Se supone el índice de refracción de la lente (n), es mayor que el índice de refracción del medio (n_m).

CONVERGENTES DIVERGENTES

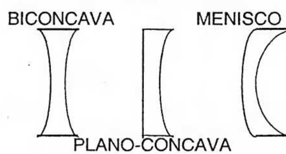


Fig. 14.18

Elementos de una lente delgada:

XX´: Eje óptico
ZR: Zona real o positiva
ZV: Zona virtual o negativa
O: Objeto, **p**: distancia objeto
I: Imagen; **q:** distancia imagen
F_1 y F_2: Focos; **f:** distancia focal
C_1 y C_2: Centros anterior y posterior, respectivamente.

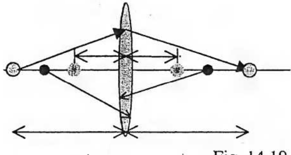


Fig. 14.19

r_1 y r_2: radios de curvatura de las caras de la lente, anterior y posterior respectivamente
n: Índice de refracción de la lente; **n_m:** Índice de refracción del medio.
La lente separa el medio en dos zonas: la virtual (ZV) es donde se encuentra el objeto y **por convención** todas las distancias medidas en esta zona son negativas,

excepto la distancia objeto p; y, la zona real (ZR) es la parte donde se propagan los rayos refractados y **por convención** todas las distancias medidas en esta zona son positivas.

Ecuaciones de lentes esféricas:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \qquad (I)$$

$$M=\frac{I}{O}=-\frac{q}{p} \qquad (II)$$

$$\frac{1}{f}=(\frac{n-n_m}{n_m})(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}) \qquad (III)$$

$r_1>0$ y/o $r_2>0$, si se mide en la zona real.

$$P=\frac{1}{f} \qquad (IV)$$

P = Potencia de una lente, está en dioptrías si f está en metros:

Convención de signos para las ecuaciones anteriores.

	f	p	q	M
+	convergente	Siempre (objeto real)	Imagen real	Imagen derecha
-	divergente	Nunca (objeto virtual)	Imagen virtual	Imagen invertida

Rayos Principales en las lentes y localización de imágenes

- Lente convergente y p>f

Fig. 14.20a

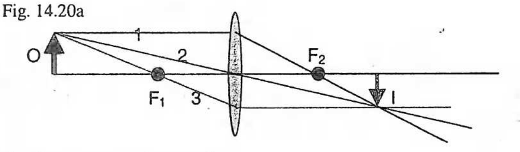


imagen real e invertida

- Lente convergente y p = f

Fig. 14.20b

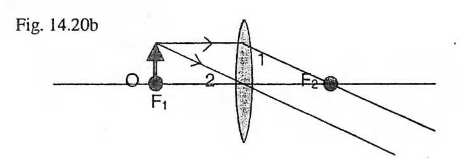


Imagen en el infinito, es decir, no hay imagen.

- Lente convergente y p < f

Fig. 14.20c

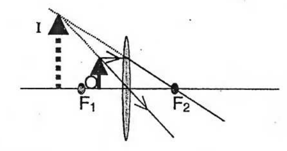
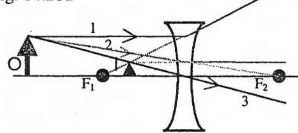


Imagen virtual, erguida y más grande que el objeto O.

- Lente divergente

Fig. 14.20d



solo un caso ?

Imagen virtual, derecha y más pequeña que el objeto O, cualquiera sea su posición.

Ejemplo :
Qué rayo no está dibujado correctamente.

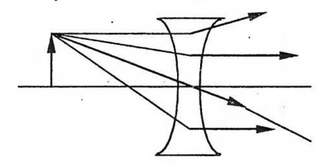


Fig. 14.20e

Ejemplo 14.3

Una lente forma una imagen derecha de un objeto y esta imagen tiene el doble de tamaño que el objeto. La imagen queda a 60 cm de la lente. Calcular la distancia del objeto y la distancia focal de la lente.

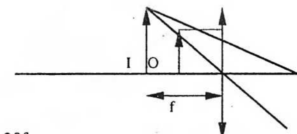


Fig. 14.20f

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{-60} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{O}{I} = \frac{p}{q}$$

$$p = \frac{60}{2} = 30cm$$

COMPORTAMIENTO CORPUSCULAR DE LA RADIACIÓN

En párrafos anteriores se pone de manifiesto que la luz al llegar a una sustancia produce efectos que son de naturaleza ondulatoria (interferencia, difracción, etc.), sin embargo, al final del siglo XIX y a principios del siglo XX, ocurrió una serie de descubrimientos experimentales, fundamentalmente aquellos que involucran el comportamiento de los átomos y que no podían explicarse con la física clásica (leyes de Newton y la teoría ondulatoria de Maxwell), como el efecto fotoeléctrico (Hertz en 1887), generación de rayos X (Röentgen 1895), el efecto Compton (Compton 1923) y el espectro de radiación del cuerpo caliente que en 1860 llevó a Kirchhoff proponer el modelo del cuerpo negro para su explicación. Sin embargo en 1900 Max Planck explica éste fenómeno adecuadamente, utilizando la cuantización de la energía, iniciando lo que se llamaría **Física moderna ó Física Cuántica.**

TEORÍA DE PLANCK (1900).-

Cuando un cuerpo se calienta hasta una temperatura T, emite radiación electromagnética de todas las frecuencias cuyo espectro experimental se muestra en la figura 14.21. Se observó que la radiación no depende del cuerpo, sino sólo de T.

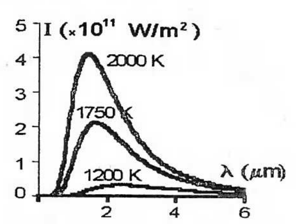


Figura 14.21 Espectro de radiación (1899) de cuerpo. Negro a 3 temperaturas diferentes.

En un intento de ajustar matemáticamente esta curva, que no se podía explicar con la física clásica, Planck propone considerar al cuerpo constituido por osciladores atómicos, así, si uno de ellos tiene una frecuencia determinada ν, según el modelo de la cavidad radiante, figura 14.22 este genera (o absorbe) la energía (E_f) como:

$$E_f = h\nu$$

- Donde h = constante de Planck = 6.63×10^{-34} J/s

En equilibrio térmico los osciladores atómicos pueden tener energía múltiplo entero de un mínimo, a la que posteriormente se llamó fotón o cuanto de energía (E_f)

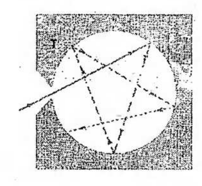


Figura 14.22 La radiación que penetra en la cavidad normalmente no sale.

La energía radiante puede escribirse como

$$E = NE_f = Nh\nu$$

Donde N es el número de fotones emitidos

14.2 EFECTO FOTOELÉCTRICO.-

Consiste en la extracción de electrones de una superficie metálica muy pulida, cuando sobre ella incide radiación (luz).

Figura 14.23 Esquema experimental. La radiación incide sobre el metal y extrae electrones que van al ánodo. El amperímetro A registra la "fotocorriente". V es el potencial acelerador de electrones, al invertír la polaridad, frena a los electrones.

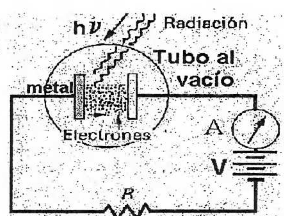


Fig. 14.23



•Resultados experimentales

- El número de electrones emitidos es proporcional a la intensidad de la radiación incidente.
- Para cada metal existe una frecuencia umbral ν_0 con la cual aún se observa el efecto fotoeléctrico, y para cada radiación de frecuencia $\nu<\nu_0$, no hay emisión de electrones.
- La energía cinética máxima de los electrones emitidos es proporcional a $(\nu-\nu_0)$ e independiente de la intensidad de la radiación incidente.
- Se observa que la emisión de fotoelectrones es casi instantánea.

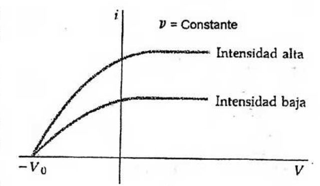


Figura 13.24a El potencial de frenado V_0 es el mismo sin importar la intensidad. Se denomina potencial de frenado, al voltaje aplicado V tal que anula la fotocorriente.

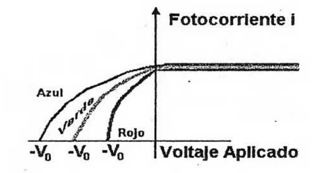


Figura 14.24b El potencial de frenado V_0 es diferente para cada frecuencia.

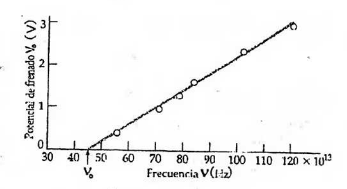


Figura 14.25 La intensidad es constante. Se observa la frecuencia umbral ν_0.

Predicciones de la física clásica

Según la teoría ondulatoria:

- El efecto debería ocurrir para cualquier frecuencia de la luz, con tal que sea lo suficientemente intensa.

- La energía cinética de los fotoelectrones debería aumentar con la intensidad del haz luminoso.
- Se estima que el tiempo de retraso en la emisión de los fotoelectrones es casi 2 minutos

Según la teoría cuántica de Einstein, la energía radiante está cuantizada en paquetes (fotones). Un fotón al llegar a la superficie es absorbido completamente por un electrón transfiriéndole energía suficiente para salir del metal con energía cinética, según la conservación de la energía, se obtiene la ecuación:

$$K_{max} = E - \varphi_0 = h\nu - h\nu_0$$

donde: $K_{max} = \frac{1}{2}mv^2$ = es la energía cinética máxima electrónica.

$E = h\nu$ = es la energía incidente.

φ_0 = función trabajo = $h\nu_0$, siendo ν_0 la frecuencia umbral.

ν = frecüencia.

De la conservación de la energía $K_{max} = eV_0$, pues e es la carga del electrón y V_0 es el potencial de frenado. La figura 14.24a muestra resultados experimentales típicos de la corriente fotoeléctrica un función del voltaje aplicado. Se observa que el potencial de frenado es independiente de la intensidad de la luz.

La figura 14.24 muestra también experimental típica del corriente fotoeléctrica en función del voltaje, se observa que el potencial de frenado depende la frecuencia (color) de la radiación.

En la figura 14.25 se muestran resultados de cómo venía el potencial de frenado en función de la frecuencia de la radiación incidente.

La función trabajo φ_0 es la energía mínima requerida por un electrón para abandonar la superficie del metal.

GENERACIÓN DE RAYOS X

Se llama así a la radiación electromagnética emitida cuando los electrones son frenados violentamente al chocar contra un material (blanco). Los electrones son previamente acelerados por una diferencia de potencial V_0, como se muestra en la figura 14.26.

En el tubo la energía potencial eléctrica eV_0, se convierte en energía cinética del electrón y cuando choca contra el blanco se generan los rayos X (bremsstrahlung), es decir se conserva la energía:

$$eV_0 = \frac{1}{2}mv^2 = h\nu + K'$$

donde:

ν = es la frecuencia del fotón

K' = es la energía cinética de retroceso

V_0 = es el potencial acelerador

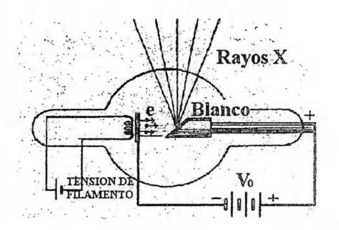


Figura 14.26 Los electrones provienen del filamento caliente y son acelerados por la fuente de alta tensión V_0. Al chocar con el blanco se genera la radiación.

Si K'=0 entonces $\nu = \nu_{max} = c / \lambda_m$, luego:

$$\lambda_m = \frac{hc}{eV_0} \approx \frac{12400}{V_0 \text{ (en V)}} \qquad (\text{en } \overset{0}{A})$$

Experimentalmente se obtiene la curva continua que se muestra en la figura 14.27, donde se resalta la aparición de una longitud de onda mínima λ_m que contradice la predicción de la física clásica.

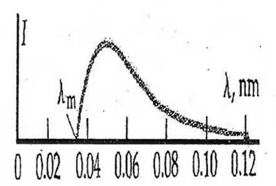


Figura 14.27 Intensidad de radiación I emitida en función de la longitud de onda λ.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.- Determine la frecuencia (en unidades de 10^{14} Hz) de la luz de color verde-amarillo si cuando se propaga en el vació tiene un número de onda (k) de 12.56 $\times 10^6$ m^{-1}

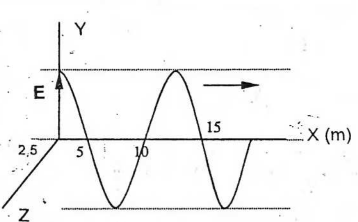
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

2- La longitud de onda y frecuencia de dos ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío son λ_1 y ν_1 para una onda λ_2 y ν_2 para la otra. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es correcta?

a) Si $\lambda_2 = 2\lambda_1$ entonces $\nu_2 = 2\nu_1$
b) Si $\nu_2 = 4\nu_1$, entonces $\lambda_2 = 4\lambda_1$
c) Si $\lambda_1 = 3$ m, entonces $\nu_1 = 100$ MHz
d) $\lambda_1\nu_2 = \lambda_2\nu_1$
e) Si $\nu_2 = 10$ GHz, entonces $\nu_2 = 30$ cm

3.- La figura adjunta muestra la componente eléctrica de una OEM que se propaga en el vació, cuya amplitud es $E_0 = 600$ N/C. Determine:

a. La ecuación de la componente eléctrica.
b) La ecuación de la componente magnética.
a) ¿A qué región del espectro electromagnético pertenece?



Respuestas:
a) $\mathbf{E} = 600 \cos \pi/5 \, (x - 3.10^8 t)\, \mathbf{j}$ V/m
b) $\mathbf{B} = 2 \cos \pi/5(x - 3.10^8 t)\, \mathbf{k}$ T
c) $\nu = 30$ MHz (RF)

4.- Una OEM propaga un campo eléctrico $E = 1000 \operatorname{sen} 2\pi(2*10^6 x - 5*10^{14} t)$ N/m en un medio homogéneo cuya permeabilidad magnética es prácticamente la del vacío. Halle:

a) La permitividad eléctrica (en términos de ϵ_0), y

b) La cantidad de movimiento de la onda por unidad de volumen p, definida como: $p = \dfrac{\text{Densidad de energía}}{\text{velocidad de la OEM}}$ (en unidades de 10^{-14} N s/m^3)

a) 1,44; 2,55 b) 1,2; 3,25 c) 1,2; 3,25 d) 1,44; 3,25
e) 0,7; 2,55

5.- Una OEM cuya frecuencia es de 1 MHz se propaga en un medio cuya permitividad es 40% mayor que la del vació y su permeabilidad es el 10% menor. Determinar (en m) su longitud de onda en el medio.

a) 120 b) 180 c) 267 d) 328 e) 430

6.- Una onda electromagnética plana se propaga en el vacío con longitud de onda de 2,5 x10^{-6} m y su intensidad media es de $(15/\pi)$ W/m^2. Determine el campo magnético instantáneo (en μ T) si la OEM esta linealmente polarizada en el eje Z y se propaga a lo largo del eje X

Rpta: $B = 0{,}2 \operatorname{sen} 10^6(2{,}51\, x - 7{,}54\ 10^8\, t)j$

7.- Hasta final del siglo XIX se suponía que el espacio, vació de materia, estaba lleno de eter el cual estaba relacionado con la luz de la misma forma que las vibraciones del aire están relacionadas con el sonido. Si se asume que el éter tiene un índice de refracción n=1.5, ¿ en cuanto se retrasaría un rayo luminoso que sale del Sol en llegar a la Tierra (distancia Tierra –sol = 1,5 x 10^{11} m)

a) 450 s b) 250 s c) 750 s d) 500 s e) 900 s

8.- Un objeto de 10 cm de tamaño se refleja en un espejo cóncavo de radio de curvatura R = 0,8 m. Cuál debe ser la distancia objeto (en m) para que el tamaño de la imagen (invertida) sea 4 veces el del objeto?

a) 0,3 b) 0,5 c) 0,7 d) 0,8 e) 0,9

9.- Un foco luminoso que se encuentra a 18,75 cm por debajo de la superficie de una fuente ornamental, transmite luz hacia el exterior (aire) a través de una superficie de 1963,5 cm^2. calcule el índice de refracción del medio donde se encuentra el foco luminoso.

a) 4/5 b) 3/5 c) 5/4 d) 3/4 e) 5/3

10.- Dos personas A y B se encuentran frente a un espejo plano; A observa su imagen frente a él a 1,5 m de distancia, en tanto que observa la imagen de B en una dirección que forma un ángulo de 30º con el espejo y a 4,5 m de distancia. Determine la distancia (en m) de B al espejo.

a) 3,5 b) 3 c) 2,5 d) 2 e) 1,5

11 .- Delante de un espejo cóncavo de radio R se coloca un objeto, obteniéndose una imagen de igual tamaño. Luego se mueve el objeto hasta obtener una imagen virtual dos veces más grande que el objeto. ¿Qué distancia se movió el objeto(en términos de R)?

A) 0,25 B) ,50 C*) 0,75 D) 1,0 E) 1,33

12 .- Cuando un objeto de 20 mm de alto, se coloca 30 cm a la izquierda de una lente de 0,2 m distancia focal, se observa:

I) Una imagen erguida y pequeña en un ojo situado 6 cm a la derecha de la lente.
II) Una imagen invertida de 4mm de alto en una pantalla colocada a la derecha de la lente.
III) Que la lente biconvexa es de vidrio Flint de 1,75 de índice de refracción y 45 cm de radio.

Son verdaderas:

A) I B) II C) III D) I y II E) II y III

13 .- Se construyen dos lentes del mismo material (**n=1,5**) que tienen una cara plana. Una es convergente y la otra es divergente, ambas tienen la cara esférica del mismo radio **r**. Se coloca un objeto a **10 cm** de la lente convergente obteniéndose un aumento lateral **M_c**, y al colocar el mismo objeto a la misma distancia de la lente divergente se obtiene un aumento lateral **M_d**, tal que $\frac{M_c}{M_d} = 2$.

I) Dibuje las lentes identificando la divergente y la convergente
II) Halle el radio r (en cm) de las lentes.

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

14 .- Una lente convergente de vidrio (n = 1,5) tiene una distancia focal de 10 cm. Hállese su potencia (en dioptrías) cuando es sumergida en agua (n = 4/3)

A) 1,0 B) 1,5 C) 2,0 D) 2,5 E) 3,0

15 .- Determine el tamaño (en cm) de la imagen de un objeto de 10 cm, ubicado a 20 cm de una lente convergente, si cuando se encuentra a 50 cm su imagen invertida resulta ser 4 veces el tamaño del objeto.

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

16.- Se tiene una lente biconvexa delgada de radio de curvatura R = 2 cm, cuyo índice de refracción es n; esta lente está inmersa en un medio cuyo índice de refracción es 1,2n. Si se coloca un objeto a una distancia igual a 0,5 cm de la lente, halle aproximadamente la distancia imagen, en cm.

A) -0,5 B) 0,5 C) -1,5 D) 1,5 E) 2,5

17 .- Sobre una superficie incide luz monocromática de $\lambda = 450$ nm con una potencia de 0,5 W, ¿cuántos fotones llegan durante 5 s, en factor de 10^{18}?

A) 1,04 B) 2,0 C) 3,40 D) 4,0 E) 5,65

18 .- Determinar la energía (en 10^{-8} eV) de un fotón cuya frecuencia es 46 MHz (1 eV = $1,6 \times 10^{-19}$ J)

A) 3 B) 5 C) 9 D) 19 E) 200

19 .- El sol entrega a la tierra una potencia media por unidad de área de 10^{3} W/m^2. Determinar el número de fotones de frecuencia 10^{15} Hz (en factor de 10^{20}) que corresponden a esta energía por unidad de tiempo y de área.

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

20 .- Para obtener fotoelectrones de un a muestra de platino la radiación incidente debe tener $\lambda \leq 196$ nm. Halle el potencial de frenado, en V, para que cese la corriente fotoelectrónica, cuando la radiación es de 141 nm.

A) 1,0 B) 2,0 C) 2,47 D) 3,40 E) 4,50

21 .- El efecto fotoeléctrico consiste en la emisión de .... cuando una superficie metálica es irradiada con ....

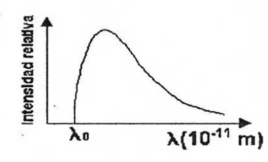
A) electrones iones B) fotones electrones C) fotones fotones
D) electrones fotones E) electrones electrones

22 .- Con relación a los rayos X, se propone que:

I. Tienen carga positiva y se pueden mover en el vacío o el aire.
II. Tienen carga negativa y sólo se pueden mover en el vacío
III. No tienen carga y no pueden atravesar ninguna lámina metálica delgada.
IV. Es una radiación electromagnética de menor energía que en las microondas.

Señale la veracidad (V) o falsedad (F), según corresponda:

A) VVVV B) FFVV C) FVFF D) FVFV E) FFFF



23.- La gráfica muestra la distribución espectral de emisión de un tubo de rayos X. Si se sabe que la diferencia de potencial entre el filamento y el blanco es de 20 kV. halle λ_0 en unidades de 10^{-11} m.

A) 5,0 B) 6,2 C) 7,3 D) 8,7 E) 9,0

RESOLUCION DE PROBLEMAS PROPUESTOS SELECCIONADOS

CAPITULO 1
MAGNITUDES DE LA FÍSICA

1. (F) Las magnitudes fundamentales se pueden medir en varias unidades
(F) Es una unidad y no una magnitud fundamental
(V) Así es, de acuerdo a la definición
(V) Así es, de acuerdo a la definición

Clave E

3. Tenemos que $[vx] = [a]^{Cos60} \rightarrow (LT^{-1})\,[x] = (LT^{-2})^{1/2}$

$$\rightarrow \quad [x] = \frac{L^{1/2}T^{-1}}{LT^{-1}} = L^{1/2}L^{-1} = L^{-1/2}$$

Note que no se uso para nada el término U.P. ln 2

Clave E

5. En la primera ecuación: $ML^2T^{-2} = M(L^3)^{\alpha}T^{\beta} + [A](LT^{-2})L + [B](ML^2T^{-3})$

$ML^2T^{-2} = ML^{3\alpha}T^{\beta} + [A]L^2T^{-2} + [B]ML^2T^{-3}$

Por homogeneidad, comparando términos:

$$3\alpha = 2 \quad \rightarrow \quad \alpha = 2/3; \;\; \beta = -2 \;; \;\; [A] = M \;; \;\; [B] = T$$

Luego: $[Q] = [A]^{\alpha}[B]^{1/\alpha} = M^{2/3}T^{3/2}$

Clave B

7. $[P] = [Q]^x[P]^y[S]^z$

$ML^{-1}T^{-2} = (L^3T^{-1})^x(ML^{-3})^y(L^2)^z$

$ML^{-1}T^{-2} = M^y\,L^{3x-3y+2z}\,T^{-x}$

Comparando exponentes: M : $y = 1$

L : $-1 = 3x - 3 + 2z \rightarrow z = -2$

T : $-2 = -x \rightarrow x = 2$

Finalmente: $P = kQ^2\,\rho s^{-2}$

Clave C

9. El argumento de la función seno es adimensional

$\rightarrow \dfrac{[x][v]^2}{[fL-E]} = *$ Pero $[fL-E] = [fL] = [E] = ML^2T^{-2}$

$\rightarrow \dfrac{[x]L^2T^{-2}}{ML^2T^{-2}} = * \rightarrow [x] = M$

Luego: x = masa

Clave D

11. (F) La fuerza es una magnitud derivada
(F) Longitud y masa sí, pero carga eléctrica no
(V) Esa es la definición

Clave D

FUNCIONES Y GRÁFICAS

1. En las dos ecuaciones despejamos t:

$$t=\frac{x-4}{2} \qquad t=\frac{y+2}{5}$$

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{5} \rightarrow y=\frac{5x}{2}-12$$

3. Recta : $y=mx$; Parabola: $y-k=cx^2$; Intersectamos: $mx=cx^2+k$

$$cx^2-mx+k=0$$

Luego: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2-4ck}}{2c}$

Entonces: $m^2-4ck\geq 0 \rightarrow m\geq\sqrt{4ck} \rightarrow m\geq 2\sqrt{ck}$

Clave A

5. $y=x^2$; $y=mx$ } $x^2=mx \rightarrow x^2-mx=0 \rightarrow x(x-m)=0$

$\therefore$ $x=0$ (vértice) ; $x=m \rightarrow y=m^2$

Luego: $P(m, m^2)$; $Q(-m,m^2)$ También: $d=\sqrt{m^2+m^4}=1$

Si $\alpha=m^2 \rightarrow \alpha+\alpha^2=1$

$\rightarrow \alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \rightarrow m=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Clave B

7. La pendiente es:

$m=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\dfrac{7-2}{5-3}=\dfrac{5}{2}$ .... (1)

Además: $M=\dfrac{4-2}{t-3}$ .... (2)

Igualando (1) y (2):

$\dfrac{5}{2}=\dfrac{2}{t-3} \rightarrow t-3=\dfrac{4}{5} \rightarrow t=\dfrac{19}{5}$

Clave B

9. $(y-k)=c(x-h)^2$; $y=4x^2+2x+3 \Rightarrow y-3=4x^2+2x$

$\Rightarrow y-3=4x^2+2x+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow y-3=\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} \Rightarrow y-3+\dfrac{1}{4}=4\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2$

$\Rightarrow y-\dfrac{11}{4}=4\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2$ Luego $V=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{11}{4}\right)$

11. $y - 4 = (x - 2)^2$ .... (1)

$y - k = c(x - h)^2$ .... (2)

Igualando (1) y (2):

$h = 2$, $k = 4$ $\Rightarrow$ $V = (2,4)$

$$d = \sqrt{(x_2 - y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} \rightarrow d = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \Rightarrow d = 2\sqrt{5}$$

y
4
d
V(2,4)
(0,0)
2
x

Clave C

MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORES

1. $\vec{a} = Proy_{\vec{b}}\,\vec{a}$

$$\left|Proy_{\vec{b}}\,\vec{a}\right| = |\vec{a}|\,Cos60°$$

$$\left|Proy_{\vec{b}}\,\vec{a}\right| = (10)\frac{1}{2} \Rightarrow \left|Proy_{\vec{b}}\,\vec{a}\right| = 5$$

a=10
60°
$\vec{a}'$
b = 20

3. $\vec{A} = 20Cos45°\,\hat{i} + 20Sen45°\,\hat{j} \Rightarrow \vec{A} = 14,14\,\hat{i} + 14,14\,\hat{j}$

$\vec{B} = 10Cos30°\,\hat{i} - 10Sen30°\,\hat{j} \Rightarrow \vec{B} = 8,66\,\hat{i} - 5\,\hat{j}$

$\vec{A} + 3\vec{B} = 14,14\,\hat{i} + 14,14\,\hat{j} + 3(8,66\,\hat{i} - 5\,\hat{j})$

$\vec{A} + 3\vec{B} = 14,14\,\hat{i} + 14,14\,\hat{j} + 25,98\,\hat{i} - 15\,\hat{j}$

$\vec{A} + 3\vec{B} = 40,12\,\hat{i} - 0,86\,\hat{j} \Rightarrow \left|Proy_{\hat{i}}\,\vec{A} + 3\vec{B}\right| = 40,12$

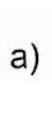
5. El producto vectorial da como resultado un vector cuyo sentido se determina por la regla de la mano derecha.

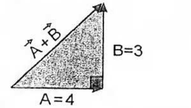
I) El sentido de $\vec{A} \times \vec{B}$ es entrante (según – Z)

II) El sentido de $\vec{B} \times \vec{A}$ es saliente (según + Z)

III) El sentido de $\vec{C} \times \vec{A}$ es entrante

7.

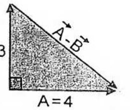




$|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{(3)^2+(4)^2}$

$|\vec{A}+\vec{B}| = 5$

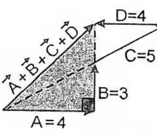
b)



$|\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{(3)^2+(4)^2}$

$|\vec{A}-\vec{B}| = 5$

c)



$|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}| = \sqrt{(4)^2+(6)^2}$

$|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}| = 2\sqrt{3}$

d)

$\vec{A}+\vec{B}+\vec{E}$ E=3 B=3 A=4

$|\vec{A}+\vec{B}+\vec{E}| = \sqrt{(4)^2+(6)^2}$

$|\vec{A}+\vec{B}+\vec{E}| = 2\sqrt{3}$

9.

a) $\vec{A}=-3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$; $\vec{B}=\hat{i}+\hat{j}$; $\vec{C}=-4\hat{j}-2\hat{k}$

$\vec{R}=-3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}-3(\hat{i}+\hat{j})$

$\vec{R}=-3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}-3\hat{i}-3\hat{j}$

$\vec{R}=-6\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ $\qquad \vec{R}=6{,}164$

$\vec{S}=2(\hat{i}+\hat{j})+3(-4\hat{j}-2\hat{k}) \Rightarrow \vec{S}=2\hat{i}+2\hat{j}-12\hat{j}-6\hat{k}$

$\vec{S}=2\hat{i}-10\hat{j}-6\hat{k}$ $\qquad \vec{S}=11{,}832$

b) El producto escalar

$$\vec{R}\cdot\vec{S} = |\vec{R}||\vec{S}|\operatorname{Cos}\theta \rightarrow \operatorname{Cos}\theta = \frac{\vec{R}\cdot\vec{S}}{|\vec{R}|\,|\vec{S}|}$$

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{(-6\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})\cdot(2\hat{i}-10\hat{j}-6\hat{k})}{|\vec{R}||\vec{S}|}$$

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{-12+10+6}{(6{,}164)(11{,}832)} \rightarrow \operatorname{Cos}\theta = \frac{4}{139{,}9}=0{,}02859$$

$\theta = 88{,}36°$

c) $\vec{S} = 2\hat{i}-10\hat{j}-6\hat{k}$

$$\operatorname{Cos}\alpha = \frac{S_z}{|\vec{S}|} = \frac{6}{\sqrt{(2)^2+(-10)^2+(-6)^2}} \rightarrow \operatorname{Cos}\alpha = \frac{6}{11{,}832}$$

$\alpha = 59{,}5°$ con el eje (–Z)

$\beta = 120{,}47°$ con el eje (+Z)

CAPITULO 2

1. $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5}{5} = 1\ m/s^2$ $v = v_o t + at = 5 + 1(8) = 13$ m/s

$Vm = \frac{v_o + v}{2}$, $8 = \frac{5+v}{2}$, $v = 11\ m/s = v_o + at$

$5 + 1(t) = 11 \Rightarrow t = 6$ s

Clave A

3. A y B tienen ecuaciones del tipo:

$x - k = c(t - h)^2$

$x - k = c(t^2 - 2ht + h^2)$

$x - k = ct^2 - 2cht + ch^2$

$x = \underbrace{k + ch^2}_{x_o} \underbrace{- 2hct}_{v_o} + \underbrace{c}_{a/2} t^2$ $\therefore$ MRUV

C : $x = mt = vt$ $\therefore$ MRU

La velocidad es cero en el vértice de la parábola

Los tres movimientos son en el eje X porque este tema - en el capítulo - es movimiento unidimensional.

Respuesta a, b y e

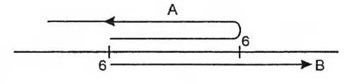
5. La partícula A realiza MRUV y la B un MRU

La ecuación de x vs t de A es:

$y - 6 = c(t - 2)^2$

Reemplazando (0,0)

$0 - 6 = c(-2)^2$, $c = -\frac{3}{2}$



Entonces

$y - 6 = -\frac{3}{2}(t - 2)^2$

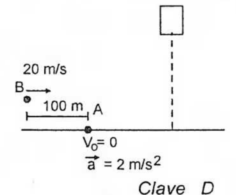
$y = 6 - \frac{3}{2}(t^2 - 4t + 4) = 6t - \frac{3}{2}t^2$

$y = 6t - \frac{3}{2}t^2$, $v_o = 6$ m/s , $a = -3\ m/s^2$

La ecuación de x vs t de B es:

$y = \frac{3}{3{,}2}t$ esto es $v = \frac{3}{3{,}2}\ m/s = 0{,}94\ m/s$

7. A: $x_A = \frac{1}{2}at^2 + 100$, B: $x_B = 20t$



$$\frac{1}{2}at^2 + 100 = 20t \ , \ \frac{1}{2}(2)t^2 + 100 = 20t$$

es decir: $t^2 - 20t + 100 = 0 \Rightarrow t = 10$

$x_B = 20(10) = 200$ m

Clave D

9. $h = \frac{1}{2}gt^2$

Al primer segundo $h' = \frac{1}{2}g(1)^2 = 5$ m

Si B llega un segundo antes que A

$$h - 5 = 25 - \frac{g}{2}(t-2)^2$$

$$h - 5 = 25 - 5(t-2)^2$$

$$h - 5 = 25 - 5t^2 + 20t - 20 \Rightarrow \quad \frac{1}{2}gt^2 = 25 - 5t^2 + 20t - 20$$

$$10t^2 = 25 + 20t - 20 \Rightarrow \quad 10t^2 = 20t - 5 = 0$$

$$t^2 - 2t - 0,5 = 0 \ , \ t = 2,2 \text{ s}$$

$$h = \frac{1}{2}(10)(2.2)^2 = 24,2 \text{ m}$$

A
B
25m/s
B llega primero
1s antes de A

Clave E

11. a) F b) V c) No siempre (F) d) No siempre (F) e) No siempre (F)

13. Para que el cuerpo regrese al punto de partida, el desplazamiento debe ser cero.

Area entre v(t) y t = A

A = A(trapecio hasta 10 s) + A(triángulo con t > 10 s)

$$A = \left(\frac{10+5}{2}\right)4 + \frac{(t-10)(v)}{2} = 0 \ \ldots\ldots\ (1)$$

La ecuación de la recta entre 5 segundos y t > 105

$$v = 8 - 0,8t \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

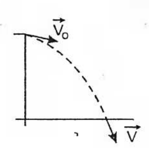
reemplazando este valor en la ecuación (1)

$$30 + \frac{(t-10)(8-0.8t)}{2} = 0$$

Desarrollando t = 18,7 s

Clave A

15. $v^2 = v_x^2 + v_y^2$



$40^2 = 24^2 + V_y^2$

$v_y = 32 \quad \Rightarrow \quad v_y = -18 - 10t$

Reemplazando datos

$-32 = -18 - 10t \quad \Rightarrow \quad -14 = -10t \quad \Rightarrow \quad t = 1{,}4\ s$

$\therefore \quad D = v_{ox}t = (24\frac{m}{s})(1{,}4\ s) = 33{,}6\ m$ *Clave B*

CAPITULO 3

1. FVV *Clave D*

3. Los puntos (3,5) ; (5, 5) y (0,8) pertenecen a la parábola de ecuación: $(y - k) = c(x - h)^2$

Del gráfico, h = 4 ,

Luego: $5 - k = c(3 - 4)^2 = c$

$5 - k = c(5 - 4)^2 = c$

$0 - k = c(8 - 4)2 = 16c \quad \Rightarrow \quad k = -16c$

$\Rightarrow \quad c = -\frac{1}{3} \quad y \quad k = \frac{16}{3}$

(3,5) (5,5) $\vec{V}_o$ (0,8) 3 m 4 2 m

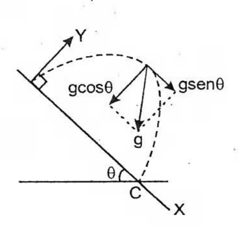
Observar que $k = h_{máx}$ (altura máxima) y R = 8 (alcance)

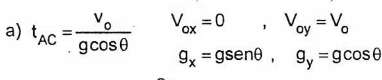
Sabemos que:

$h_{máx} = \frac{v_{yo}^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad v_{yo}^2 = 2gh_{máx} = (2)(10)\frac{16}{3} \quad \Rightarrow \quad v_{yo} = (8/3)\sqrt{15}$

$R = 2v_{xo}v_{yo}/g \quad \Rightarrow \quad v_{xo}v_{yo} = 40 \quad \Rightarrow \quad v_{xo} = \sqrt{15}$ *Clave D*

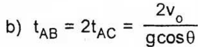
5. Escoger XY de modo que X sea paralelo al plano. En este sistema "g" tiene dos componentes.





a) $t_{AC} = \frac{v_o}{g\cos\theta} \qquad V_{ox} = 0 \quad , \quad V_{oy} = V_o$

$g_x = g\,\text{sen}\theta \ , \quad g_y = g\cos\theta$



b) $t_{AB} = 2t_{AC} = \frac{2v_o}{g\cos\theta}$

c) El alcance: $R = v_{ox}t + \frac{1}{2}g_x t^2 \qquad t = t_{AB}$

$R = \frac{1}{2}(g\,\text{sen}\theta)\left(\frac{2v_o}{g\cos^2\theta}\right)^2 = \frac{2v_o^2 tg\theta}{g\cos\theta}$

7. $$T_S = \frac{T_P}{18}$$

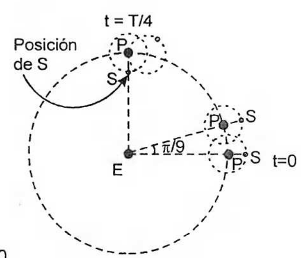
Para el planeta:

$$T_P \Rightarrow 2\pi$$

$$\frac{T_P}{18} \Rightarrow \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{9}$$

Es decir, por cada vuelta de S alrededor de P, P avanza $\pi/9$ en su trayectoria, osea $\measuredangle$(EPS), es igual a cero nuevamente.

En t = T/4, P ha recorrido $\theta_2 = \pi/2$ y S ha realizado n vueltas, donde:



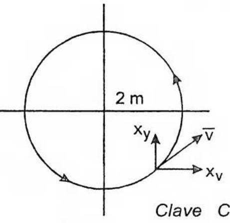
$$n = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\pi/2}{\pi/4} = 4{,}5 \text{ vueltas} \Rightarrow \measuredangle(\text{EPS}) = 0$$

Clave A

9. $a_{cp} = ?$

$v = \hat{i} + \sqrt{3}\,\hat{j}$ R = 2 m $\omega = \text{cte}$

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{1+3}{2} = 2\,m/s^2$$



Clave C

11. M = ? pero t = 5 s $\theta_o = \pi$ $\omega_o = 0$

a. t = 3 , $\alpha = \pi$ rad/s^2 $\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{2}(3^2) = 5{,}5\pi$

b. Para $3 < t \le 5$ $\theta_o = 5{,}5\pi$ $\omega_o = \alpha\Delta t_1 = \pi(3) = 3\pi$ (rad/s)

$$\Rightarrow \theta = \theta_o + \omega_o\Delta t_2 + \frac{\alpha}{2}\Delta t_2^2 = 5{,}5\pi + 3\pi(2) + \frac{1}{2}(2\pi)(2)^2$$

$(\Delta t_2 = 2\text{ s} \text{ y } \alpha = -2\pi)$ $\theta = 7{,}5\pi$

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = 3{,}75 \text{ vueltas}$$

Clave

13. $\alpha = 1{,}2\,rad/s^2$

$a_{cp} = 2a_T$ $a_T = \alpha R = 2{,}4\,m/s^2$

$a_{cp} = 2(2{,}4) = 4{,}8\,m/s^2$

$a = \sqrt{4{,}8^2 + 2{,}4^2} = 5{,}37\,m/s^2$

Clave C

15. $\alpha = 2\dfrac{rad}{s^2}$, en $t = 1s$ $a = \sqrt{5}$

a) Para t = 2s , a_N = ?

b) Para t = 2s , S = ?

a) En t = 1 s $a_T = \alpha R = 2R$ $\omega = \alpha t$ $a_N = \omega^2 R = (2\cdot 1)^2 R = 4R$

$$a = \sqrt{5} = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{4R^2 + 16R^2} \rightarrow 20R^2 = 5$$

$$R = \sqrt{\frac{5}{20}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2} m$$

En t = 2 s $a_N = \omega^2 R = (2\cdot 2)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}\ m/s^2$

b) $S = S_o + v_1 t + \dfrac{1}{2} a_T t^2$, $S_o = 0$ $v_T = 0$ en $t = 0$

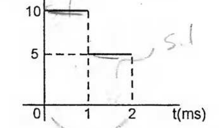
$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(\alpha R)t^2 = \frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2)^2 = 2\sqrt{2}\ m$$

Clave

CAPITULO 7

Problema 4

Se muestra una gráfica F vs t, en un cierto impacto. Entonces:

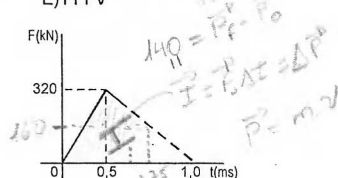


I. El Contacto duró 2 ms
II. El objeto impactado recibió 10 N.s. hacia la derecha y 5 N.s. hacia la zquierda
III. El impulso neto es de 5 N.s
IV. El vector impulso señala siempre en el sentido de la fuerza media.

A) VVVV B) VFVV C) VFFV D) FVVF E) FFFV

Solución

I. V
II. F
III. F : El impulso es de $15\hat{u}$ N.s
IV. V : $\vec{I} = \vec{F}_m \Delta t$



Problema 5

Un jugador de fúlbol se dispone a ejecutar un penal. Si la fuerza que el jugador ejerce sobre el balón de 2 kg varía con el tiempo según se muestra en la figura, y el contacto con el balón dura 0,75 ms, determine la rapidez (en m/s) con la que sale disparado el balón.

A) 70 B) 71 C) 72 D) 73 E) 74

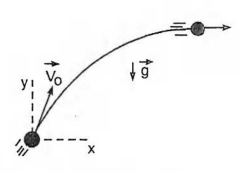
Problema 6

Un proyectil de masa m = 2 kg es disparado con una velocidad $\vec{v}_o = 4\hat{i} + 8\hat{j}$ m/s. Calcule el impulso (en kg. m/s) de la fuerza gravitatoria sobre el proyectil, desde el instante del disparo hasta que alcanza su altura máxima.

A) $-16\hat{j}$ B) $16\hat{j}$ C) $8\hat{j}$ D) $-8\hat{j}$ E) $-12\hat{j}$

Solución

Sea t_s el instante en que la partícula alcanza su altura máxima.

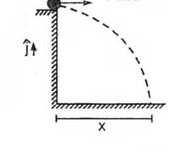


$$v_y = v_{oy} - gt_s = 0 \Rightarrow t_s = \frac{v_{oy}}{10} = 0{,}8 \text{ s}$$

$$\vec{I} = m\vec{g}\,\Delta t = 2(10)(-\hat{j})\left(\frac{8}{10}\right) = -16\hat{j}\,\text{N.s}$$

Problema 7

Se lanza horizontalmente la esferita de 1kg con una rapidez de 3 m/s. Si hasta que impacta en el piso horizontal recibe un impulso de $-4\hat{j}$ N.s debido a la fuerza gravitacional, calcule la posición x (en m) del impacto ($g=10$ m/s^2)



A) 0,3 B) 0,6 C) 0,9 D) 1,2 E) 1,5

Problema 8

Un sistema aislado de dos partículas, de masas m_1 y m_2, en un instante dado se están moviendo con velocidades $\vec{v}_1 = 8\hat{j}$ m/s y $\vec{v}_2 = -2\hat{j}$ m/s, respectivamente. Si posteriormente se encuentra que sus velocidades son $\vec{v}_1' = 4\hat{i} - \hat{j}$ m/s y $\vec{v}_2' = 8\hat{i}$ m/s, ¿cuál es la relación m_2/m_1 entre sus masas?

A) 0,5 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Solución

En un sistema aislado se conserva $\vec{P}$

$$\Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

$$8m_1\hat{i} - 2m_2\hat{j} = 4m_1\hat{i} - m_1\hat{j} + 8m_2\hat{i} \Rightarrow (4m_1 - 8m_2)\hat{i} + (m_1 - 2m_2)\hat{j} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = 2m_2 \\ 4m_1 = 8m_2 \end{cases} \qquad \therefore \quad \frac{m_2}{m_1} = 0{,}5$$

Problema 9

Un rifle ligero de 9,1 N de peso dispara un proyectil de 13 g de masa. Determina la relación (energía cinética del proyetil) ÷ (energía cinética del rifle) un instante después del disparo.

A) 65 B) 68 C) 70 D) 72 E) 74

Problema 10

Un coche de 60 kg y un niño de 40 kg se mueven juntos con una rapidez de 7 m/s. Si de repente el niño empieza a correr sobre el coche con velocidad de 5 m/s respecto del coche y en dirección opuesta al del movimiento del coche, ¿Cuál será la rapidez (en m/s) del niño respecto a Tierra?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Solución

$\vec{p}_o = \vec{p}_f$: Conservación de la cantidad de movimiento.

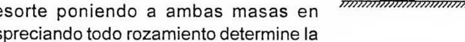
$100 \cdot 7\hat{i} = 40 \cdot (-5\hat{i} + \vec{v}) + 60\vec{v}$

$\Rightarrow \quad \vec{v} = 9\hat{i}$ m/s : velocidad del coche

$\therefore \quad \vec{v}_{N/T} = 4\hat{i}$ m/s : velocidad del niño respecto a tierra.

Problema 11

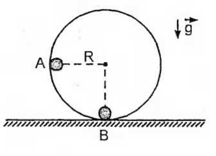
Dos bloques A y B de masas 2 kg y 4 kg respectivamente están separadas por un resorte ideal de constante k = 1 200 N/m , el cual esta comprimido 0,2 m. De pronto se suelta el resorte poniendo a ambas masas en movimiento, despreciando todo rozamiento determine la rapidez (en m/s) que adquiere cada bloque.



A) 1;2 B) 2;4 C) 3;6 D) 4;8 E) 5;10

Problema 12

Dentro de una esfera lisa de radio 5 m se encuentran dos bloques A y B de masas 5 kg y 10 kg respectivamente. Si el bloque A se suelta desde la posición mostrada en la figura y luego hace impacto elásticamente con B, inicialmente en reposo, halle a qué altura (en m) se elevará el bloque A después de la primera colisión con B.



A) 1/3 B) 5/9 C) 8/9 D) 5/3 E) 7/3

Solución

$\vec{p}_o = \vec{p}_f$: Conservación de la cantidad de movimiento.

Sea $\vec{v}_A$: velocidad de A antes de la colisión con B

Sean $\vec{v}_A'$ y $\vec{v}_B'$: velocidades de A y B después de la colisión.

$\Rightarrow \quad 5v_A = 5v_A' + 10v_B' \Rightarrow v_A = v_A' + 2v_B'$ .... (1)

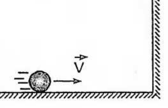
Como el choque es elástico, e = 1

$\Rightarrow \quad v_B' - v_A' = -(0 - v_A) \Rightarrow v_A = v_B' - 2v_A'$ .... (2)

De (1) y (2): $v_A' = -\dfrac{v_A}{3}$ luego: $h' = \dfrac{v_A'^2}{2g} = \dfrac{1}{9}\dfrac{v_A^2}{2g} = \dfrac{R}{9} = \dfrac{5}{9}$m

Problema 13

Una pelotita de 0,5 kg se mueve horizontalmente con una velocidad de $20\hat{i}$ m/s , impacta frontalmente con una pared vertical y luego rebota; si el coeficiente de restitución es 0,8. Calcular el impulso recibido (en N.s)



A) $-18\hat{i}$ B) $-20\hat{i}$ C) $-22\hat{i}$ D) $-24\hat{i}$ E) $-26\hat{i}$

Problema 14

Una pelota cae libremente desde cierta altura, en su rebote contra el piso, pierde el 50% de su energía; determine aproximadamente el coeficiente de restitución.

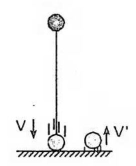
A) 0,5 B) 0,6 C) 0,7 D) 0,8 E) 0,9

Solución

$$\varepsilon = \frac{v'}{v}$$

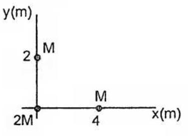
$$E_k' = \frac{1}{2}mv'^2 \; ; \quad E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{E_k'}{E_k} = \frac{v'^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{E_k'}{E_k}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$$



Problema 15

En el arreglo de masas puntuales, mostrado en la figura, halle la posición del centro de masa (en m).



A) $0,5\hat{i} + 0,5\hat{j}$ B) $\hat{i} + 0,5\hat{j}$ C) $0,5\hat{i} + \hat{j}$

D) $1,5\hat{i} + \hat{j}$ E) $\hat{i} + 1,5\hat{j}$

Problema 16

Se lanza una granada verticalmente y en el punto más alto de su trayectoria explosiona, partiéndose en tres fragmentos idénticos. El primero sale con una velocidad $\vec{v}_1 = 80\hat{i}$ m/s y el segundo con $\vec{v}_2 = -20\hat{i} + 10\hat{j}$ m/s . Halle la velocidad (en m/s) del centro de masa inmediatamente después de la explosión. ¿Cuál es la aceleración del centro de masa?

A) $60\hat{i} - 10\hat{j}\,;\,\vec{g}$ B) $60\hat{i} + 10\hat{j}\,;\,\vec{0}$ C) $-60\hat{i} - 10\hat{j}\,;\,\vec{g}$

D) $\vec{0}\,;\,\vec{g}$ E) $\vec{0}\,;\,\vec{0}$

Solución

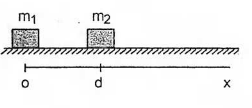
Sea $\vec{P}$: Cantidad de movimiento de la granada en el punto más alto

$$\Rightarrow \quad \vec{P} = \vec{O} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}}{M} = \vec{O}$$

Por otro parte, $\vec{a}_{CM} = \dfrac{m\vec{g} + m\vec{g} + m\vec{g}}{3m} = \vec{g}$

Problema 17

La figura muestra la posición en t = 0 s de 2 partículas con masas m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg que se están moviendo a lo largo del eje X. Si la posición del centro de masa en cualquier instante posterior «t» está dada por $x_{CM} = 0{,}333 + 0{,}667t$ (m), hallar la velocidad del CM (en m/s) y la separación inicial (d) de las partículas (en m).



A) $0{,}667\hat{i}$; 0,5 B) $0{,}33\hat{i}$; 0,5 C) $0{,}667\hat{i}$; 0,333

D) $0{,}221\hat{i}$; 0,333 E) $0{,}776\vec{i}$; 0,667

Problema 18

Dos partículas ubicados en $\bar{r}_1 = 2\hat{i}+2\hat{j}$ m y $\bar{r}_2 = 5\hat{i}+8\hat{j}$ m tienen su centro de masa ubicado en $\bar{r} = 4\hat{i}+6\hat{j}$ m. Determinar las masas (m_1, m_2) de las partículas (en kg) si la suma de ambas es 6 kg.

A) 1 ; 5 B) 2 ; 4 C) 3 ; 3 D) 4 ; 2 E) 5 ; 1

Solución

Sean m_1 y m_2 las masas de las partículas 1 y 2 respectivamente.

$$\bar{r}_{CM} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2}{m_1+m_2} \quad \text{: Posición del CM}$$

$$(4\hat{i}+6\hat{j})(m_1+m_2) = m_1(2\hat{i}+2\hat{j}) + m_2(5\hat{i}+8\hat{j})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_1+5m_2 = 4(m_1+m_2) \Rightarrow 2m_1 = m_2 \\ 2m_1+8m_2 = 6(m_1+m_2) \Rightarrow 4m_1 = 2m_2 \end{cases}$$

$$\text{Como } m_1 + m_2 = 6\text{kg} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 2\text{ kg} \\ m_2 = 4\text{ kg} \end{cases}$$

CAPITULO 8

1. Se muestra el tramo del movimiento en el eje X.

20 cm

– ← -10 0 +10 → + x(cm)

Frecuencia: $\nu = 120\dfrac{\text{ciclos}}{\text{min}} = 2\dfrac{\text{ciclos}}{\text{s}} = 2\text{ Hz} = 2\text{ s}^{-1}$

$\Rightarrow \quad \omega = 2\pi\nu = 4\pi$ rad/s

Amplitud A = 0,1 m

Posibles Soluciones:

1. $x = A\text{sen}(\omega t+\alpha)$, en $t=0$, $x=0$ $\Rightarrow$ $0 = A\text{sen}\alpha$ $\Rightarrow$ $\alpha = 0, \pm\pi, \ldots$

ó

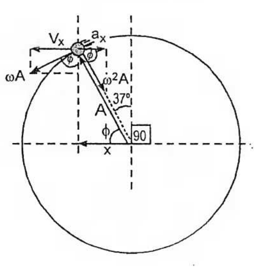
2. $x = A\cos(\omega t+\beta)$, en $t=0$, $x=0$ $\Rightarrow$ $0 = A\cos\beta$ $\Rightarrow$ $\beta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}\ldots$

Solamente b) y d) tienen A, ω , correctos; cuantas en coseno.
y como la fase para cos es $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ La Rpta. es d) $x = 0,1 \cos(4\pi t - \pi/2)$m

Clave D

3. Las flechas indicadas representan: Posición, velocidad y aceleración centripeta, del MCU.
$A = 1m$ $\quad \omega A = 5\pi$ m/s $\quad \omega^2 A = 25\pi^2$ m/s^2
Las flechas horizontales representan los componentes de las cantidades anteriores, en el X.



Con $\phi = 53°$

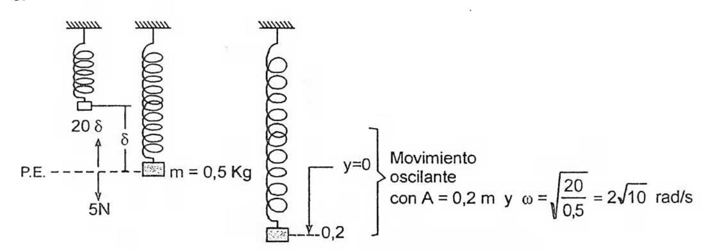
$$x = -A\cos\phi = (-1)\frac{3}{5} = -0,6m$$

$$v_x = -\omega A sen\phi = -5\pi\frac{4}{5} = -4\pi \text{ m/s}$$

$$a_x = +\omega^2 A sen\phi = 25\pi^2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} = 15\pi^2 \text{ m/s}^2$$

Clave C

5.



$\Rightarrow \delta = \frac{1}{4}m = 0,25\,m$ $\qquad$ Ecuación de Mov.: $y = 0,2Cos(2\sqrt{10}t)$

Aun en este oscilador vertical se cumple que: $a_y = -\omega^2 y \Rightarrow a_y = 0$ para $y = 0$, es decir ocurre en la posición de equilibrio, punto en que la velocidad es máxima.

$$\Rightarrow E_k\Big|_{a_y=0} = E_k\Big|_{v_y=MAX} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}(0,5)(\omega A)^2 = \frac{1}{4}4(10)(0,04) = 0$$

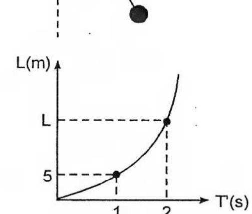
$$= 400 \text{ mJ}$$

Clave E

7. Periodo de un péndulo simple

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{L}{g}$$

haciendo $T' = \dfrac{T}{2\pi} \Rightarrow L = gT'^2$.....(1)



Cuya gráfica L vs T' es una parábola que pasa por el origen.

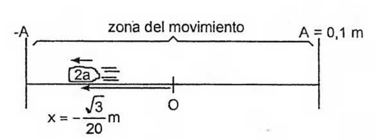
Ecuación de la parábola: $L = 5T'^2$.....(2)

$\Rightarrow$ para $T' = 2 \Rightarrow L = 5(2)^2 = 20$ m

y comparando (1) y (2): $g = 5$ m/s^2

Clave A

9.



Calculo de la frecuencia angular "ω"

Sabemos $(x)^2 + \left(\dfrac{v}{\omega}\right)^2 = (A)^2$

Reemplazamos: $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{20}$m, $v = \dfrac{1}{2}$m/s, $A = \dfrac{1}{10}$m

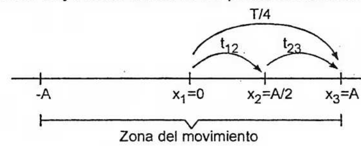
$$\frac{3}{400} + \frac{1}{4\omega^2} = \frac{1}{100} = \frac{4}{400}$$

$\Rightarrow \omega = 10$ rad/s

$$E_{k_{max}} = \frac{1}{2}mv^2_{max} = \frac{2}{2}(\omega A)^2 = (10 \cdot 0{,}1)^2 = 1{,}0 \text{ J}$$

Clave E

11. Ubiquemos en la trayectoria del MAS los puntos mencionados en el problema.



Si la ecuación $x = A = \text{Sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, que asumimos por conveniencia

Se cumple que: $x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 0$

que si $x_2 = \frac{A}{2} = 4\text{Sen}\left(\frac{2\pi}{T}t_2\right) \Rightarrow \frac{2\pi t_2}{T} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{T}{12}$

Además el tiempo desde $x_2 = \frac{A}{2}$ hasta $x_3 = A$, es $t_{23} = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}$

Clave A

13. Partiendo de $x = 0{,}4\,\text{Sen}(15t + \pi/4)$ m
Hallemos $v = 6\,\text{Cos}(15t + \pi/4)$ m/s
y $a = -90\text{Sen}(15t + \pi/4)$ m/s

Sabemos que la fuerza recuperadora en un MAS es también la fuerza resultante:

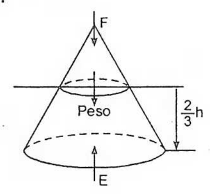
$\Rightarrow F_{REC} = F_{RESULT} = ma =$

$\Rightarrow F_{\substack{REC\\MAX}} = ma_{MAX} = (0{,}3)(90) = 27$ N

Clave A

CAPITULO 9

1.



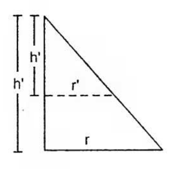
$\Sigma f_y = 0$

F + peso = E

$F = \rho_{agua}\, gV_s - \rho_c g V_c$ .... (1)

h' = 1/3 h

$\frac{h'}{r'} = \frac{h}{r} \rightarrow r' = \frac{r}{3}$



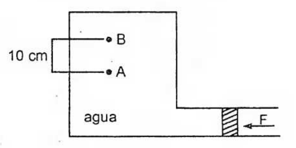
$V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r'^2 h = \frac{8}{27}\pi r^2 h$

En (1): $F = gh\left(\frac{8}{3}\rho_{agua} - 3\rho_c\right)$

3. Inicialmente:

$P_B' = 1{,}2 \cdot 10^5$ Pa

$P_A' = P_B' - \rho_{agua}\, g(0{,}1)$



Luego de aplicarse F:

Principio de Pascal

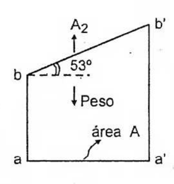
$P_A = P_A' + \Delta P$

$$P_A = P'_A + \frac{F}{A} \qquad P_B = P'_B + \frac{F}{A}$$

$$P_B - P_A = P'_B - P'_A = \rho g(0{,}1) = 10^3(10)(0{,}1) = 10^3$$

en unidades de 10^3 $\quad P_B - P_A = 1$

5.



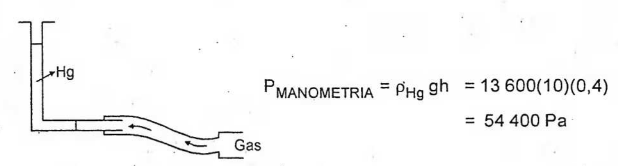
Inicialmente: $P_1 = \frac{Peso}{A_1} = \frac{Peso}{A}$ Finalmente: Se modificó el área

$$P_2 = \frac{Peso}{A_2} \qquad A_2 = \frac{A}{Cos53°}$$

$$P_2 = \frac{Peso}{\frac{A}{Cos37°}} = \frac{Peso}{A}Cos53°$$

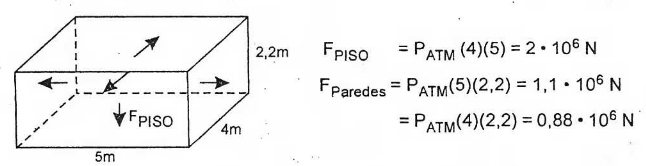
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{Cos53°} = \frac{1}{3/5} = \frac{5}{3}$$

7.



$$P_{MANOMETRIA} = \rho_{Hg}\, gh = 13\,600(10)(0{,}4) = 54\,400 \text{ Pa}$$

9.



$$F_{PISO} = P_{ATM}(4)(5) = 2 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$F_{Paredes} = P_{ATM}(5)(2{,}2) = 1{,}1 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$= P_{ATM}(4)(2{,}2) = 0{,}88 \cdot 10^6 \text{ N}$$

Se entiende que estas fuerzas son neutralizadas por fuerzas similares que obran en sentido contrario.

CAPÍTULO 10

Problema 1

Un termometro desconocido marca 0°X cuando en un termometro Celsius la temperatura es –10°C y marca 200°X para 100°C. ¿Cuántos grados X corresponde a la temperatura de 34°C.

Solución

$$\frac{110}{200} = \frac{34+10}{T_x} = \frac{44}{T_x}$$

$$T_X = \frac{200 \bullet 44}{110} = 80°X$$

°X	°C
200X	100°C
X	34
0°X	-10°C

Problema 2

Consideremos un cubo de arista "a" y coeficiente de dilatación cubica γ . Si calentamos el cubo de tal manera que su temperatura se incrementa en T_0, halle el cociente entre la diagonal del cubo y la diagonal de una de sus caras.

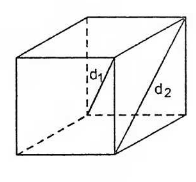
Solución

$$d_{10} = a\sqrt{3} \qquad d_{20} = a\sqrt{2}$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{3}$$

$$d_{1f} = d_{10}\left(1+\frac{\gamma}{3}T_o\right) \quad ; \quad d_{2f} = d_{20}\left(1+\frac{\gamma}{B}T_o\right)$$

$$\frac{d_{1f}}{d_{2f}} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}}\frac{\left(1+\frac{\gamma}{3}T_o\right)}{\left(1+\frac{\gamma}{3}T_o\right)} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1.5}$$



Problema 3

Une plancha delgada rectangular de dimensiones 3x4 m de cierto material se encuentra a 50°C. Si su área se incrementa en 2% cuando su temperatura se incremente en 50°C, determinar la longitud final de la diagonal cuando la temperatura es de 100°C.

Solución

$$S_f = S_o(1+2\alpha\Delta T) \qquad \frac{102}{100}A_o = A_o(1+2\alpha\Delta T)$$

$$1.02 = 1+2\alpha\Delta T \qquad 0.02 = 2\alpha\Delta T$$

$$\alpha = \frac{0.02}{2\bullet 50} = 2\bullet 10^{-4}\frac{1}{°C}$$

$$d_f = d_o(1+\alpha\Delta T) = 5(1+2\bullet 10^{-4}\bullet 50) = 5(1+0{,}01) = 5(1{,}01)$$

$$d_f = 5{,}05 \text{ m}$$

Problema 4

Un calorímetro que no absorbe calor contiene 500 g de agua a 30°C. ¿Qué masa de hielo a 0°C se debe introducir al calorimetro para que la temperatura final sea de 20°C.

Solución

Q_1 = Calor cedido por el agua a 30°C

Q_2 = Calor requerido para cambiar de fase los mg de hielo

Q_3 = Calor requerido para calentar los mg de agua de 0°C a 20°C

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$500(1)(30-20) = 80m + m(1)(20) = 100m$$

$$500 = 100m$$

$$m = 50g$$

Problema 5

Un pedazo de cobre caliente de 100g (c = 0,093 cal/g°C) se introduce en un recipiente de vidrio (c = 0,12 cal/g°C) de 350 g que contiene 100 g de hielo a 0°C. Si finalmente se obtiene 100g de agua a 27°C. ¿Cuál era la temperatura del cobre caliente?.

Solución

Q_1 = Calor cedido por el cobre caliente

Q_2 = Calor requerido por el vidrio para elevar su temperatura de 0°C a 27°C

Q_3 = Calor requerido para fundir las 200g de hielo

Q_4 = Calor requerido para elevar la temperatura del agua de 0°C a 27°C

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$500 \cdot 0{,}093(T_x - 47) = 350 \cdot 0.12(27-0) + 100 \cdot 80 + 100 \cdot 1 \cdot (27-0)$$

$$46{,}5(T_x - 27) = 1134 + 8000 + 2700 = 11834$$

$$(T_x - 27) = \frac{11\,834}{46.5} = 254{,}49$$

$$T_x = 254{,}49 + 27 = 281{,}5°C$$

Problema 6

Un sólido de 11 g de masa se divide en tres pedazos de masas m_1, m_2 y m_3. Si cada parte recibe la misma cantidad de calor, la masa m_1 eleva su temperatura en dos grados, la masa m_2 en 4 grados y la masa m_3 en 6 grados. Hallar las masas m_1 , m_2 y m_3 en gramos.

Solución

$$\Delta Q = cm_1 \Delta T = cm_1 2$$

$$\Delta Q = cm_2 \Delta T = cm_2 4$$

$$\Delta Q = cm_3 \Delta T = cm_3 6$$

$$2cm_1 = 4cm_2 = 6cm_3$$

$$2m_1 = 4m_2 = 6m_3$$

$$m_1 = 2m_2 = 3m_3$$

$$\frac{m_1}{m_2}=2 \qquad \frac{m_1}{m_2}=2 \qquad \frac{m_1}{m_3}=3$$

$$m_1+m_2+m_3=11$$

$$3m_3+\frac{3}{2}m_3+m_3=11 \quad \Rightarrow \quad m_3=2\text{ g}$$

Luego: $m_1 = 6\text{g}$; $m_2 = 3\text{ g}$; $m_3 = 2\text{ g}$

Problema 7

Se ha encontrado que para fundir completamente un bloque de cierta material de calor latente 120 cal/g y calor especifico $2\text{x}10^{-3}$ cal/g°C. se necesitan 120,6 kcal. Si su punto de fusión es de 30°C. ¿Qué cantidad de calor adicional se tendrá que suministrar si se desea tener el material líquido a 420°C?

Solución

$$120\,600 = m\cdot 120 \qquad m=\frac{120\,600}{120}=1005\text{ g}$$

$$Q = 1\,005 \cdot 2 \cdot 10^{-3}(420-320) = 1\,005 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 100$$

$$Q = 201\text{ cal}$$

SOLUCIONES: PAGINAS 266, 267, 268

1. $P_I = P_{II} + (1\,000)(10)(0,1)$ ... (antes)

$P_I = P'_{II} - P\,(1\,000)(10)(0,1)$ ... (después)

$P'_{II} - P_{II} = 2\,000$

$n_{II}\,R\,\Delta\,T = 2\,000$

$n_{II}\,\frac{25}{3}(60) = 2\,000 \quad \Rightarrow \quad n_{II} = 4$ *Clave C*

3. $P = 250\text{ W}$

$W = (250)\,(120)\text{ J}$

$W_{ef} = 4\,320\text{ cal}$

$4\,320 = (3\,000)(0,094)\,\Delta t$

$\Delta t = 15,3\text{ °C}$ *Clave C*

5. $n_1 = \frac{11\cdot 10^5(10^{-2})}{(25/3)(300)}\text{mol}$

$n_2 = \frac{3\cdot 10^5 \cdot 10^{-2}}{25/3\,(300)}\text{ mol}$

$m = 25(n_1 - n_2) \quad \Rightarrow \quad m = 80\text{ gramos}$ *Clave C*

7.

$Q_1 = 1000 \text{ cal}$ $\quad Q_2 = -200 \text{ cal}$

$W_1 = 100 \text{ cal}$ $\quad W_2 = -300 \text{ cal}$

$\Delta U_1 = Q_1 - W_1$ $\quad \Delta U_2 = Q_2 - W_2$

$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$

$\Delta U = 1{,}0 \text{ kcal}$ *Clave B*

9.

$\Delta U_1 = 50 \text{ J}$

$W_2 = -20 \text{ J}$

$\Delta U_2 = -50 \text{ J}$

$Q_2 = ?$

Por la primera ley

$Q_2 = W_2 + \Delta U_2$

$Q_2 = -70 \text{ J}$ (absorbe) *Clave B*

11. $T_C = 360 \text{ K}$; $T_f = 300 \text{ K}$

$$\varepsilon = 1 - \frac{300}{360}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{6} \quad ; \quad 1\frac{kJ}{s} = \frac{1}{6} P_{entrada}$$

$$P_{entrada} = 6 \ \frac{kJ}{s}$$ *Clave C*

13. $Q = W + \Delta U \Rightarrow Q = 0 \Rightarrow W = -\Delta U$

$$\Delta U = \frac{3}{2} nRT$$

$W = 2\,500 \text{ J}$ *Clave A*

15.
- I. Efectivamente, si las áreas son iguales, el trabajo es el mismo
- II. No, la máquina que trabaja entre temperatura más diferentes es mayor
- III. De acuerdo a lo dicho en II, efectivamente el proceso 12 341 es más eficiente.

CAPITULO 11

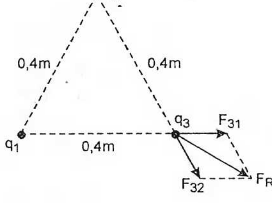
1. $q_1 = q_2 = q_3 = -4 \ \mu C$

$$F_{31} = F_{32} = F = \frac{(9 \cdot 10^9)(4 \cdot 10^{-6})(4 \cdot 10^{-6})}{(4 \cdot 10^{-1})^2}$$

$F = 0{,}9 \text{ N}$

$$F_R = \sqrt{F^2 + F^2 + 2FF\text{Cos}60}$$

$$F_R = 0{,}9\sqrt{3} \text{ N}$$



3. $q_1 = q_2 = q_3 = 1\mu C$

$$\vec{E}_1 = \frac{(9\cdot10^9)(1\cdot10^{-6})}{1^2}\hat{i} = 9\cdot10^3\,\hat{i}\,\frac{N}{C}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{(9\cdot10^9)(1\cdot10^{-6})}{1^2}\hat{j} = 9\cdot10^3\,\hat{j}\,\frac{N}{C}$$

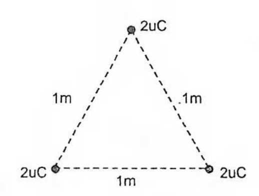
$$E_2 = \frac{9\cdot10^9\cdot1\cdot10^{-6}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{9}{2}\cdot10^3\,\frac{N}{C}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{9}{2}\cdot10^3 \text{Cos}45\,\hat{i} + \frac{9}{2}\cdot10^3 \text{Sen}45\,\hat{j}\,\frac{N}{C}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{9\sqrt{2}}{4}\cdot10^3\,\hat{i} + \frac{9}{4}\sqrt{2}\cdot10^3\,\hat{j}\,\frac{N}{C}$$

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 9\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\hat{i} + 9\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\hat{j}\ \frac{kN}{C}$$

5.

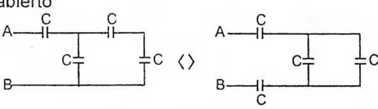


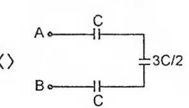
$$W = \frac{(9\cdot10^9)(2\cdot10^{-6})(2\cdot10^{-6})}{1} + \frac{(9\cdot10^9)(2\cdot10^{-6})(2\cdot10^{-6})}{1} + \frac{(9\cdot10^9)(2\cdot10^{-6})(2\cdot10^{-6})}{1}$$

$W = 3(36\cdot10^{-3})$ mJ

$W = 108$ mJ

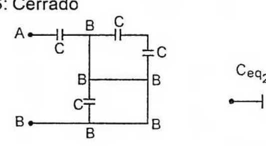
7. S: abierto





$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{3C/2} + \frac{1}{C} \Rightarrow C_{eg_1} = \frac{3C}{5}$$

S: Cerrado

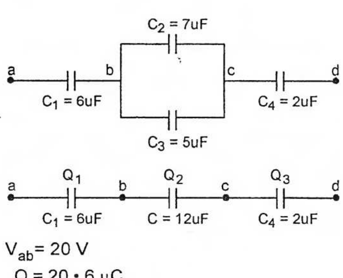


$C_{eq_2} = C$

$$\frac{C_{eq_1}}{C_{eq_2}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Clave C

9.



$V_{ab} = 20\ V$

$Q = 20 \cdot 6\ \mu C$

$Q = 120\ \mu C$

En serie $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 120\ \mu C$ además $C_{eq} = \frac{4}{3}\mu F$

$$\Rightarrow V_{ad} = \frac{q}{C_{eq}} = \frac{120\ \mu C}{\frac{4}{3}\mu F} = 90\ V$$

Clave C

11. $E = 2\,000\ N/C$; $V = Ed$; $C = \dfrac{\varepsilon_o A}{d}$

$$E_C = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_o A}{d} \cdot E^2 d^2 \Rightarrow \frac{E_C}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$$

Energía por unidad de volumen $= \frac{1}{2} \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}(2000)^2$

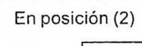
$= 18\ \mu J/m^3$

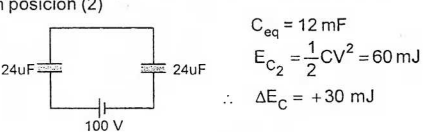
Clave C

13. En posición (1) $C_{eq} = 6\ \mu F$

8 uF 24 uF 100 V

$$E_{C_1} = \frac{1}{2}CV^2 = 30\ mJ$$


En posición (2)



$C_{eq} = 12\,mF$

$E_{C_2} = \frac{1}{2}CV^2 = 60\,mJ$

$\therefore\ \Delta E_C = +30\,mJ$

Clave D

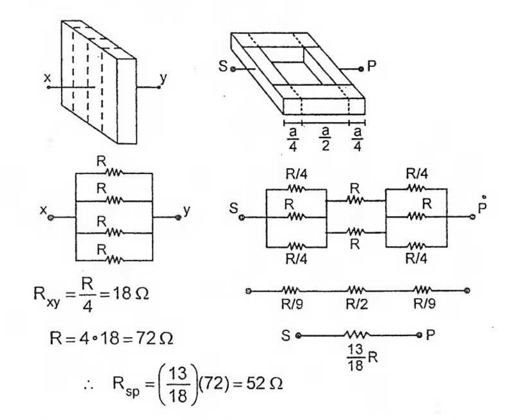
CAPITULO 12

2. $R = \frac{V}{I}$, $V = EL \Rightarrow R = \frac{(20)(3)}{2} = 50\,\Omega$

$\therefore\ V = RI \Rightarrow V = 50 \cdot 10\,V$

$V = 500\,V$

4.



$R_{xy} = \frac{R}{4} = 18\,\Omega$

$R = 4 \cdot 18 = 72\,\Omega$

$\therefore\ R_{sp} = \left(\frac{13}{18}\right)(72) = 52\,\Omega$

6. A 58° $\Rightarrow$ $I = \frac{V}{R}$ .... (I)

A 20°C $\Rightarrow R_o = \frac{V}{I_o} \Rightarrow R_o = \frac{6}{4{,}5} = \frac{4}{3}\Omega$

Calcular de R (58°C) $R = R_o(1 + \alpha_t \Delta T)$

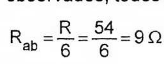
$R = \frac{4}{3}(1 + 0{,}004)(58 - 20) = 1{,}3536$

$R = 1{,}35\Omega$

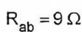
En (1) $I = \frac{-6}{1{,}3536} = 4{,}4326\,A$

$I = 4{,}4326\,A$

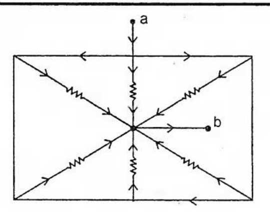
8. El gráfico muestra la corriente entre "a" y "b", el potencial de entrada en cada resistencia es V_a y el de salida V_b. Por lo observados, todos están en paralelo.



$$R_{ab} = \frac{R}{6} = \frac{54}{6} = 9\,\Omega$$

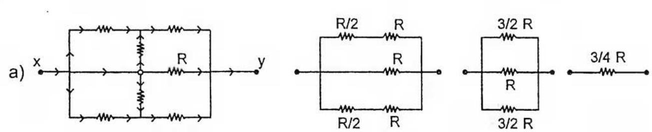


$$R_{ab} = 9\,\Omega$$

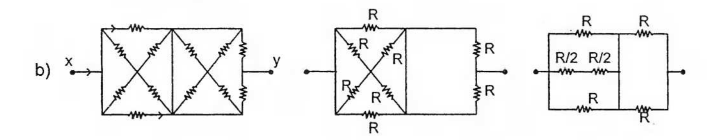


10.

a)



b)



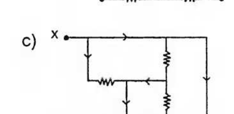
R/3 R/2

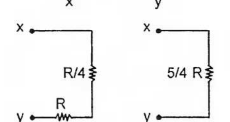
5/6 R

x y

$$R_{xy} = \frac{5}{6} \cdot 12 = 10\,\Omega$$

c)





x

5/4 R

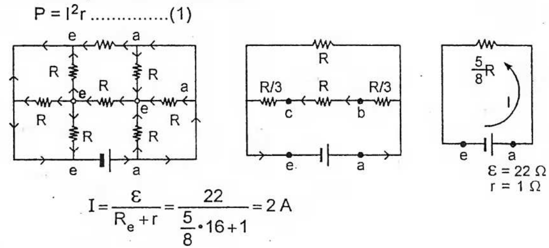
y

$$R_{xy} = \frac{5}{4} \cdot 12 = 15\,\Omega$$

Resp.: $9\,\Omega$, $10\,\Omega$, $15\,\Omega$

12. Potencia disipada interiormente: P

$P = I^2 r$ ....(1)



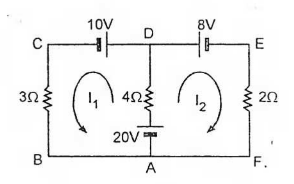
$$I = \frac{\varepsilon}{R_e + r} = \frac{22}{\frac{5}{8} \cdot 16 + 1} = 2\,A$$

En (1): $P = (2)^2(1) = 4\,W$

14. Para: $R = 3\,\Omega \Rightarrow V = 3I_1$ ....(1)

$R = 4\,\Omega \Rightarrow V = 2I$ ....(2)

donde $I = I_1 + I_2$ (mismo sentido)



En $\Delta DCBA$ $\Sigma\Delta V = \Sigma\mathcal{E} + \Sigma R_1 = 0$

$20 - 4I_1 - 4I_2 - 10 - 3I_1 = 0$

$-7I_1 - 4I_2 + 10 = 0$ ....(3)

En $\Delta DEFA$ $\Sigma\Delta V = \Sigma\mathcal{E} + \Sigma R_1 = 0$

$20 - 4I_1 - 4I_2 - 8 - 2I_2 = 0$

$-4I_1 - 6I_2 + 12 = 0$ ....(4)

(III) • (–3) : $21I_1 + 12I_2 - 30 = 0$

(IV) • (2) : $-8I_1 - 12I_2 - 24 = 0$

$13I_1 + 0 - 6 = 0 \Rightarrow I_1 = 0{,}46\text{ A}$

En (III): $-7(0{,}46) - 4I_2 + 10 = 0 \Rightarrow I_2 = 1{,}69\text{ A}$

En (I) : $V = (3)(0{,}46) \Rightarrow V = 1{,}38\text{ V}$

En (II) : $V = (4)(0{,}46 + 1{,}69) = 8{,}6\text{ V}$

16.

$$\text{Error} = \frac{I_o - I}{I_o} \cdot 100\%$$

$$I_o = \frac{\mathcal{E}}{36} \;;\; I_o = \frac{\mathcal{E}}{36 \div R_A}$$

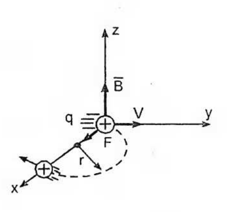
36Ω
I_o
$\mathcal{E}$

36Ω
I
(A) R_A
$\mathcal{E}$

$$\therefore\; 3 = \frac{\dfrac{\mathcal{E}}{36} - \dfrac{\mathcal{E}}{36 + R_A}}{\dfrac{\mathcal{E}}{36}} \cdot 100 \Rightarrow 0{,}03 = \frac{R_A}{36 + R_A} \Rightarrow R_A = \frac{1{,}08}{0{,}97} = 1{,}11\,\Omega$$

CAPITULO 13

2. Entre P y Q la trayectoria es una semicircunferencia de radio r = 1 m



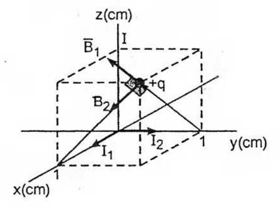
$\overline{F}_3 = q\overline{v} \times \overline{B} \Rightarrow F_m = qvB\,\text{Sen}90° = qvB$

$\overline{F}_m = F_c \Rightarrow qvB = \dfrac{mv^2}{r} = v = \dfrac{qBr}{m}$

$$\therefore\; v = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 0.8}{2 \cdot 10^{-6}}\hat{j} = 0{,}8\hat{j}\ \text{m/s}$$

Clave C

4.



$$\overline{B}_1=\frac{\mu_o I}{2\pi a}\left(\frac{-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{2}}\right) \qquad \overline{B}_2=\frac{\mu_o I}{2\pi a}\left(\frac{\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\overline{B}=\overline{B}_1+\overline{B}_2=\frac{\mu_o I}{2\pi a}\left(\frac{-\hat{i}+\hat{k}+\hat{i}-\hat{k}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\mu_o I}{2\pi a}\left(\frac{\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{2}}\right)$$

$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}=\overline{O}$

$\therefore\ qvBSen\theta=0 \qquad \overline{v}\,//\,\overline{B}$

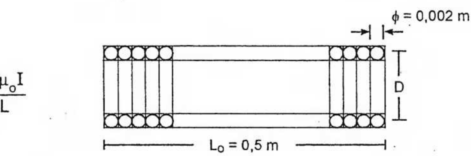
$\overline{v}$, $\overline{B}$: Tiene el mismo vector unitario. Dirección dé v;

$(\hat{i}-\hat{j})/\sqrt{2}$ ó $(-\hat{i}+\hat{j})/\sqrt{2}$

Clave C

6.

$$B=\frac{N\mu_o I}{L}$$



Número de espiras = $\dfrac{L}{\phi}=\dfrac{0{,}5}{0{,}002}=250=N_o$

$$B=\frac{N_o\mu_o I}{L_o}=\frac{250}{0{,}5}\mu_o I=500\mu_o I$$

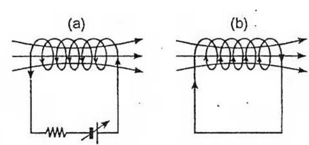
$B=0{,}9B_o=0{,}9\cdot 500\mu_o I=450\mu_o I \ (N=N_o-10=250-10=240)$; $L=??$

$$0{,}9B_o=\frac{N\mu_o I}{L}\Rightarrow 0{,}9\cdot 500\mu_o I=\frac{240\mu_o I}{L}\Rightarrow L=\frac{240}{450}=0{,}533\text{ m}$$

$L=53{,}3$ cm

Clave C

8.



Al aumentar la fem el campo mostrado en "a" aumenta, en b el campo es de sentido contrario al primero (Ley de Lenz)

Clave B

10. $\varepsilon(t) = \varepsilon_o \text{Sen} 2\pi \upsilon t$
$\varepsilon(t) = 220\sqrt{2}\text{Sen}(120\pi t)$ $\Big\}$ $\varepsilon_o = 220\sqrt{2}\ \text{V}$, $\varepsilon_{ef} = 220 - \text{V}$, $\nu = 60\ \text{Hz}$

90Ω
180Ω
ε(t)

$$I_{efi} = \frac{\varepsilon_{eF}}{R} \begin{cases} I_{ef} = \dfrac{220}{90}\text{A} = 2{,}44\ \text{A} \\ I'_{ef} = \dfrac{220}{180}\text{A} = 1{,}22\ \text{A} \end{cases}$$

$$P = \frac{V_{EF}^2}{R} \begin{cases} P = \dfrac{220^2}{90}\ \text{W} \neq 537{,}77\ \text{W} \\ P' = \dfrac{220^2}{180}\ \text{W} = 268{,}85\ \text{W} \end{cases}$$

$$P + P' = 806{,}55\ \text{W}$$

Clave A

CAPITULO 14

1. – Luz verde amarillo
– vacio
– $k = 12{,}56 \cdot 10^6\ \text{m}^{-1}$

$$v = c = \lambda\nu = \frac{2\pi}{k}\nu$$

Reemplazando: $3 \cdot 10^8 = \dfrac{2\pi\nu}{12{,}56 \cdot 10^6}$

$$\nu = 5{,}99 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} \approx 6 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

Clave D

3. $E_o = 600\ \text{N/C}$

$$\frac{E_o}{B_o} = c$$

y
E
2,5
5
10
15
x(m)
z

De la figura: $\lambda = 10\ \text{m}$

Se sabe que: $E = E_o \text{Cos}(kx \pm \omega t)$

Hallando primero el campo magnético

$$B_o = \frac{E_o}{c} = \frac{600}{3 \cdot 10^8} = 200 \cdot 10^{-8} = 2 \cdot 10^{-6}\text{T}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}\ \text{m}^{-1}$$

Relacionando la velocidad de la onda con la frecuencia

$c = \lambda\upsilon \Rightarrow 3 \cdot 10^8 = 10\upsilon \Rightarrow \upsilon = 3 \cdot 10^7\ \text{Hz}$

$\omega = 2\pi\upsilon = 6\pi \cdot 10^7\text{Hz}$; $c = \dfrac{\omega}{k} \Rightarrow \upsilon = 30\ \text{Mhz}$

$$\overline{E} = \hat{j}\,600\text{Cos}\frac{\pi}{5}(x - 3 \cdot 10^8 t)\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$$



Usando la regla de la mano derecha para hallar la dirección del campo $\overline{B}$

$\overline{E} \times \overline{B} \; // \; \overline{v} \quad \Rightarrow \quad \overline{B} // \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \overline{B} = \hat{k}\, 2 \cdot 10^{-6} \, \text{Cos} \frac{\pi}{5}(x - 3 \cdot 10^{8} t) T$

Clave B

5. OEM

$\nu = 1 \text{ MHz} = 10^6 \text{ Hz}$; $\varepsilon = 40\% \varepsilon_o + \varepsilon_o = 1{,}4 \varepsilon_o$

$\mu = \mu_o - 10\% \mu_o = 0{,}8\mu$

$\lambda = ?$

$$v = \lambda \nu = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}4\varepsilon_o \cdot 0{,}9\mu_o}} \; ; \; v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}4 \cdot 0{,}9}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{1{,}4 \cdot 0{,}9}} = \lambda \nu$$

$$\frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{1{,}4 \cdot 0{,}9}} = \lambda 10^6 \Rightarrow \lambda = \frac{300}{\sqrt{1{,}4 \cdot 0{,}9}} \Rightarrow \lambda \approx 267 \, m$$

Clave C

7. $t_o = \frac{\ell}{\upsilon_o}$; $t = \frac{\ell}{\upsilon'}$; $t > t_o$

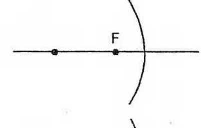
$$\Rightarrow \Delta t = t - t_o = \ell\left(\frac{1}{\upsilon'} - \frac{1}{\upsilon_o}\right) \; ; \; \upsilon_o = \frac{c}{n_o} = \frac{c}{1} \; ; \; \upsilon' = \frac{c}{n'} = \frac{c}{1{,}5}$$

$$\Delta t = \ell\left(\frac{1{,}5}{c} - \frac{1}{c}\right) \Rightarrow \Delta t = \frac{\ell}{c}(0{,}5) \Rightarrow \Delta t = \frac{1{,}5 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8}(0{,}5)$$

$$\Delta t = (0{,}5)(0{,}5) \cdot 10^3 \Rightarrow \Delta t = 250 \, s$$

Clave B

11. Espejo concavo $f > 0$



$M = \frac{I}{O} = -1 = -\frac{q}{p}$

$q = p$

Reemplazando en:

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \rightarrow \frac{2}{p} = \frac{1}{f} = \frac{1}{M_2} \Rightarrow p = R$$

$p_1 = R$

Se mueve el objeto para obtener un imagen virtual 2 veces más grande entonces $I = 2|O|$

$M = +2 = -\frac{q}{p} \rightarrow q = -2p$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p} = \frac{1}{2p} \Rightarrow f = 2p = R/4$

$p_2 = R/4$

El objeto se movió : $\Delta p = p_1 - p_2 = R - \frac{R}{4} = \frac{3R}{4}$

Clave C

15. Datos : $I = ?$; $O = 10$ cm ; $p = 20$ cm

Para: $p_1 = 50$ cm

Imagen invertida

$$I' = -4O \Rightarrow \frac{I'}{O} = -4 = -\frac{q'}{p'} \Rightarrow 4p' = q'$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{4q'} = \frac{5}{4p'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{5}{4(50)} \Rightarrow f = 40\,\text{cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{40} = \frac{1}{20} + \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{40} - \frac{1}{20} = \frac{1}{q} \Rightarrow -\frac{1}{40} = \frac{1}{q}$$

$q = -40$ cm

$$\frac{I}{O} = -\frac{q}{p} = -\frac{-40}{20} = 2 \Rightarrow \frac{I}{10} = 2 \Rightarrow I = 20\text{ cm}$$

Clave B

17. Datos: $\lambda = 450 \cdot 10^{-3}$ m ; $P = 0{,}5$ W ; $t = 5$ s ; $N = ?$

Se sabe: $P = \frac{E}{t} = \frac{Nh\upsilon}{t} = \frac{Nhc}{t\lambda} \rightarrow N = \frac{Pt\lambda}{hc}$

Reemplazando datos: $N = \frac{0.5 \cdot 5 \cdot 450 \cdot 10^{-9}}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot ^{8}} \approx 5{,}65 \cdot 10^{18}$ fotones

Clave E

19. Datos: $\nu = 10^{15}$ Hz ; $I = 10^{3}$ W/m^2

Se define intensidad, $I = \frac{\text{Potencia}}{\text{Area}} = \frac{P}{S} \Rightarrow I = \frac{P}{S} = \frac{E}{t \cdot S} = \frac{Nh\nu}{t \cdot S} \rightarrow \frac{N}{t \cdot S} = \frac{I}{h\nu}$

Reemplazando datos: $\frac{N}{t \cdot S} = \frac{10^3}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 10^{15}} = 15 \cdot 10^{20}\ \frac{\text{fotones}}{s \cdot m^2}$

Clave D

21. El efecto fotoeléctrico consiste en la **emisión** de **electrones** de una superficie metálica cuando es **irradiada** por **fotones** en el rango visible

Clave D

23. Datos: $V_o = 20\,000$ V

Se sabe que para la emisión de rayos X se cumple:

$\lambda_o = \frac{12\,400}{V_o(\text{en V})}$ (en Å), reemplazando ; $\lambda_o = \frac{12\,400}{20000} = 0{,}62$ Å $= 6{,}2 \cdot 10^{-11}$ m

Clave B